

О выпуклых соединениях правильных пирамид

Е.В. Полтанов¹
cozdatel.007@mail.ru

Д.Н. Судаков²
dashe4ka-93@mail.ru

А.В. Тимофеев²
A.V.Timofeenko62@mail.ru

А.В. Якушева¹
yaps1980@yandex.ru

1 – МОУ школа 149 (Красноярск)

2 – СФУ (Красноярск)

Аннотация

Выпуклый многогранник с рёбрами длины один или два составлен из не более четырнадцати правильных пирамид с единичными рёбрами тогда и только тогда, когда он является одним из 57 многогранников. Каждый из них представлен формулой или проекциями.

Введение

Известно, что с точностью до подобия существует ровно три правильные пирамиды. При классификации выпуклых правильных тел [1] они получили обозначения M_1, M_2, M_3 , которым в указанном порядке соответствуют тетраэдр и пирамиды с квадратным и пятиугольным основаниями. Несколько лет назад доказано, что кроме бесконечных серий призм и антипризм, существует только 186 выпуклых многогранников, каждая грань которых составлена из одного или нескольких правильных многоугольников так, что каждая вершина этого многоугольника является и вершиной многогранника. Из этих 186 тел 78 обладают неправильными гранями. Все пять таких граней получены соединением треугольника, квадрата и пятиугольника с треугольником, а также квадрата и пятиугольника с двумя треугольниками. Они служат примерами паркетных многоугольников, все 23 типа которых были перечислены Ю. А. Пряхиным [2], а полнота списка доказана в работе [3].

Более четырёх десятилетий назад было замечено [2], что найти все типы выпуклых многогранников с паркетными гранями можно по схеме, которой придерживались авторы теоремы о классификации выпуклых многогранников с правильными гранями [1]. Понятно также, что реализация этой схемы встречает гораздо больший, чем в работе [1], объём вычислений. Видимо поэтому до сих пор известно только, что кроме четырех бесконечных серий несоставных многогранников с паркетными гранями, существует лишь конечное число типов таких тел. В настоящей работе описаны те вычисления, которые невозможно обойти при реализации схемы из [1]. Они привели к нахождению каждого составленного из не более 14 правильных пирамид с единичными рёбрами выпуклого многогранника, длины рёбер которого не превосходят числа два. Описаны также все разбиения такого многогранника на тела с паркетными гранями.

Словосочетание «многогранник P составлен из правильных пирамид» в настоящей работе означает, что до каждой такой пирамиды можно добраться за несколько шагов, рассекая на каждом шаге тело P плоскостью на два выпуклых многогранника, каждый из которых составлен из правильных пирамид. О других разбиениях будет рассказано в следующей работе.

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications", Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at <http://ceur-ws.org>

1 Выпуклые соединения не более 14 правильных пирамид

Из 57 многогранников теоремы только тринадцать не помечены кружком, который указывает на попадающие внутрь ребра или грани вершины правильных многоугольников, из которых составлены некоторые грани. Даже если к этим тринадцати добавить несколько тел, для которых в теореме есть подобный или равнотипный многогранник, то всё равно очевидно кратное увеличение вычислений в сравнении с классификацией выпуклых правильных многогранников [1, 4, 5].

ТЕОРЕМА. *Выпуклый многогранник с рёбрами длины один или два составлен из не более четырнадцати правильных пирамид с единичными рёбрами тогда и только тогда, когда он является одним из следующих тел:*

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3, \tag{1}$$

$$S_{1,1} + M_1, \quad S_{1,1} + M_2, \quad S_{1,2} + M_2, \quad S_{1,3} + M_3, \tag{2}$$

$${}^\circ S_{2,2} + M_1, \quad S_{2,2} + M_2, \quad {}^\circ S_{2,2} + M'_2, \tag{3}$$

$${}^\circ S_{3,1} + M_2, \quad {}^\circ S_{3,1} + M'_2, \quad S_{3,2} + M_1, \quad S_{2,2} + S_{2,2}, \quad S_{2,2} + S'_{2,2}, \quad {}^\circ S_{2,2} + S''_{2,2}, \tag{4}$$

$${}^\circ S_{4,1} + M_1, \quad {}^\circ S_{4,4} + M_2, \tag{5}$$

$${}^\circ S_{5,1} + M_1, \quad {}^\circ S_{5,2} + M_1, \quad {}^\circ S_{5,2} + M_2, \quad {}^\circ S_{3,1} + S_{3,1}, \quad {}^\circ S_{3,1} + S_{3,3}, \tag{6}$$

$${}^\circ S_{6,2} + M_1, \quad {}^\circ S_{6,5} + M_2, \quad S_{4,6} + S_{3,1}, \tag{7}$$

$${}^\circ S_{7,1} + M_1, \quad {}^\circ S_{7,2} + M_1, \quad S_{7,3} + M_2, \quad {}^\circ S_{6,2} + S_{2,2}, \quad {}^\circ S_{6,5} + S_{2,2}, \quad {}^\circ S_{5,1} + S_{3,1}, \tag{8}$$

$${}^\circ S_{8,3} + M_2, \quad {}^\circ S_{6,5} + S_{3,1}, \quad {}^\circ S_{6,5} + S_{3,3}, \tag{9}$$

$${}^\circ S_{9,1} + M_1, \quad {}^\circ S_{9,1} + M_2, \quad {}^\circ S_{9,3} + M_2, \quad {}^\circ S_{8,3} + S_{2,2}, \quad {}^\circ S_{5,1} + S_{5,1}, \tag{10}$$

$${}^\circ S_{10,1} + M_2, \quad {}^\circ S_{10,4} + M_2, \quad {}^\circ S_{10,5} + M_1, \tag{11}$$

$${}^\circ S_{11,2} + M_1, \quad {}^\circ S_{11,3} + M_1, \quad S_{9,1} + S_{3,1}, \quad {}^\circ S_{9,1} + S'_{3,1}, \quad {}^\circ S_{9,3} + S_{3,1}, \tag{12}$$

$${}^\circ S_{12,3} + M_2, \quad {}^\circ S_{12,4} + M_1, \quad {}^\circ S_{10,4} + S_{3,1}, \tag{13}$$

$${}^\circ S_{13,1} + M_1, \quad {}^\circ S_{13,1} + M_2, \quad {}^\circ S_{13,3} + M_2, \quad {}^\circ S_{12,3} + S_{2,2}, \quad S_{7,3} + S_{7,3}, \quad S_{7,3} + S'_{7,3}, \tag{14}$$

причём многогранник $S_{i,j}$ расположен в списке (i) на j-м месте:

$$S_{1,1} = M_1, \quad S_{1,2} = M_2, \quad S_{1,3} = M_3, \quad S_{2,1} = S_{1,1} + M_1, \quad \dots, \quad S_{14,6} = S_{7,3} + S'_{7,3};$$

штрих указывает на различие многогранников, составленных из двух одинаковых тел, кружком помечены тела с фиктивными вершинами.

Отметим совпадение некоторых многогранников теоремы с известными, ставшими классическими телами, обозначения которых можно найти в работе [4], см. также Атласы R. Tupelo-Schneck (<http://tupelo-schneck.org/polyhedra/>) и E. Weisstein (<http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html>): треугольная бипирамида $P_{2,21} = J_{12} = S_{2,1}$, скошенная треугольная призма $P_{2,22} = S_{2,2}$, октаэдр $[3^4] = S_{2,3}$, пятиугольная бипирамида $P_{2,27} = J_{13} = S_{2,4}$, наращённый октаэдр $P_{3,33} = S_{3,2}$, дважды наращённый октаэдр $P_{4,11} = S_{4,3}$, скошенный куб $P_{4,30} = S_{4,4}$, двойная наращённая 4-угольная пирамида $P_{4,31} = S_{4,5}$, тетраэдр

${}^2M_1 = S_{6,1} = S_{5,1} + M_1$ с двойными рёбрами, трёхскатный купол $M_4 = S_{7,3} = J_3 = S_{4,6} + S_{3,1}$, наращённый трёхскатный купол $P_{2,25} = S_{8,3}$, усечённая пирамида $M_{2a} = S_{9,3} = S_{6,5} + S_{3,3}$, 4-угольная пирамида ${}^2M_2 = S_{10,3}$ с двойными рёбрами, наклонная призма $Q_1 = S_{12,3}$ с шестиугольными основаниями, трёхскатный прямой бикупол $S_{14,5} = P_{2,35} = M_4 + M_4 = J_{27}$, кубооктаэдр $S_{14,6} = P_{2,36} = M_4 + M'_4 = [3, 4, 3, 4]$. О разбиении на правильные пирамиды архимедовых тел M_4 и M_{10} см. [6], а о том, как разбить на такие пирамиды многогранник Иванова Q_1 , см. [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По каждой правильногранной пирамиде и каждому соединению этих пирамид будем строить модель, в которой закрашены только фундаментальные грани, т.е. такие взятые в минимальном количестве грани многогранника, действуя на которые симметриями этого тела, получаем все его грани. Например, на рис. 1 многогранник $S_{4,1}$ закрашен в спектральном порядке согласно его обозначению ${}^\circ S_{3,1} + M_2 = {}^\circ ((M_1 + M_2) + M_1) + M_2$ в теореме. Другими словами, красным цветом закрашен тетраэдр M_1 , присоединённая к нему пирамида M_2 закрашена оранжевым цветом, соединённый с призмой $M_1 + M_2$ тетраэдр окрашен жёлтым цветом и зелёным — 4-угольная пирамида M_2 , соединённая с телом ${}^\circ(M_1 + M_2) + M_1$.

Если любые две грани многогранника различны, то множество его фундаментальных граней совпадает с множеством всех граней этого тела. Если же есть хотя бы две одинаковые грани, то список фундаментальных граней может быть меньше списка всех граней. Он действительно будет меньше, если существует симметрия, то есть совмещающее с собой многогранник движение, которое одну его грань отображает на другую.

Следовательно, если многогранник — будем обозначать его P — обладает одинаковыми гранями, то требуется искать симметрии этого многогранника, точнее группу симметрий тела P , за которой закрепим обозначение $\text{Aut } P$. Все повороты, совмещающие с собой P , образуют подгруппу, которую обозначим $\text{Aut}^+ P$.

Как найти все повороты группы $\text{Aut}^+ P$?

Прежде всего заметим, если такой поворот существует, то его ось проходит через вершину, или центр грани, или середину ребра. Это значит, что, выяснив для каждой вершины, каждого центра грани и каждой середины ребра, лежат ли они на оси поворота группы $\text{Aut}^+ P$, получим ответ на поставленный вопрос. Однако на практике необходимых для рассмотрения случаев будет гораздо меньше.

Например, многогранник $S_{4,1}$ обладает единственным ребром длины 2, рис. 1. Поэтому поворот группы $\text{Aut}^+ S_{4,1}$ отображает его на себя. Следовательно, существует не более одной оси поворота, совмещающего с собой тело $S_{4,1}$. Очевидно, что такая ось существует и кроме середины общего ребра трапеций содержит общую вершину ромбов. Следовательно, группа $\text{Aut}^+ S_{4,1}$ состоит из тождественного преобразования и найденного поворота на 180° . Если подгруппа $\text{Aut}^+ P$ не совпадает с группой $\text{Aut } P$, то между поворотами группы $\text{Aut}^+ P$, и симметриями второго рода из разности $\text{Aut } P \setminus \text{Aut}^+ P$ существует взаимно-однозначное соответствие. Поэтому необходимо либо доказать, что несобственных симметрий не существует, либо найти еще две несобственные симметрии. Ими являются отражения от перпендикулярных плоскостей с общей, рассмотренной выше, осью поворотов. Приходим к списку фундаментальных граней тела $S_{4,1}$: треугольник, ромб, трапеция, рис. 2.

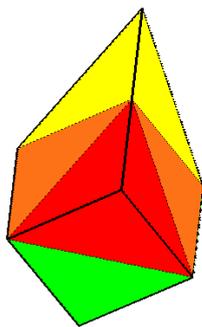


Рис. 1: Закраска тела $S_{4,1}$, отражающая его сборку

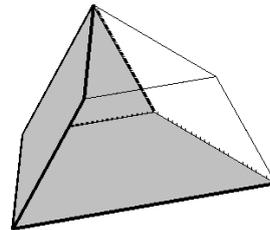


Рис. 2: Фундаментальные грани многогранника $S_{4,1}$

Тела $S_{4,1}$ и $S_{4,2}$ образуют в теореме одну из трёх пар, обозначения в которых отличаются лишь штрихом, рис. 3, 4. Ниже будет представлена другая такая пара $S_{4,4}$ и $S_{4,5}$, рис. 5, 6. Тела $S_{14,5}$ и $S_{14,6}$ упомянуты

выше и представлены в процитированных атласах.

Если выпуклый многогранник составлен из k правильных пирамид с единичными рёбрами, а рёбра самого многогранника имеют длину 1 или 2, то будем называть его k -составным, $k = 1, 2, \dots$. Каждый k -составной многогранник будем получать всевозможными соединениями по одинаковым фундаментальным граням $(k - m)$ -составного тела и m -составного многогранника, $m = 1, 2, \dots, [k/2]$, где $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$. Описанная схема реализована ниже и видна по названиям разделов. Каждый многогранник теоремы будет получен в виде соединения двух тел. После обозначения первого из них будут перечислены его фундаментальные грани, а вслед за обозначением второго — те его фундаментальные грани, которые есть у первого. Кроме того, вслед за названием фундаментальных граней второго многогранника записываются выпуклые соединения по этой грани, если такие соединения с рёбрами длины < 3 существуют.

1.1 2-составные тела

1. M_1 , треугольник:

$$M_1, \text{ треугольник}; S_{2,1} = M_1 + M_1;$$

$$M_2, \text{ треугольник}; S_{2,2} = M_1 + M_2.$$

2. M_2 , треугольник, квадрат:

$$M_2, \text{ квадрат}; S_{2,3} = M_2 + M_2.$$

3. M_3 , треугольник, пятиугольник:

$$M_3, \text{ пятиугольник}; S_{2,4} = M_3 + M_3.$$

У каждого треугольника тел $S_{2,1}$ и $S_{2,4}$ есть сторона, которой соответствует настолько большой двугранный угол, что без нарушения выпуклости к этим телам невозможно присоединить составленные из правильных пирамид выпуклые тела.

1.2 3-составные тела

1. $S_{2,2}$, 2 треугольника, ромб, квадрат:

$$M_1, \text{ треугольник}; S_{3,1} = S_{2,2} + M_1;$$

$$M_2, \text{ квадрат}; S_{3,2} = S_{2,2} + M_2;$$

$$M_2, \text{ треугольник}; S_{3,3} = S_{2,2} + M_2'.$$

2. $S_{2,3}$, треугольник:

$$M_1, \text{ треугольник}; S_{2,3} + M_1 = S_{3,2}.$$

1.3 4-составные тела

1.3.1 Соединения 3-составного и 1-составного тел

1. $S_{3,1}$, треугольник, квадрат, трапеция:

$$M_2, \text{ квадрат}; S_{4,1} = S_{3,1} + M_2;$$

$$M_2, \text{ треугольник}; S_{4,2} = S_{3,1} + M_2'.$$

2. $S_{3,2}$, 2 треугольника, ромб:

$$M_1, \text{ треугольник}; S_{4,3} = S_{3,2} + M_1.$$

3. $S_{3,3}$, треугольник, трапеция, прямоугольник:

$$M_1, \text{ треугольник}; S_{3,3} + M_1 = S_{4,2}.$$

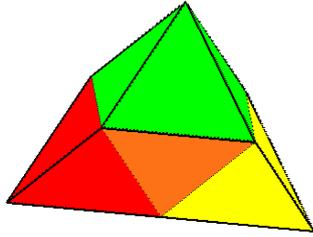


Рис. 3: Закраска тела $S_{4,1}$, отражающая его сборку

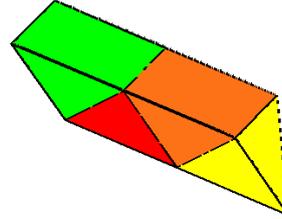


Рис. 4: Закраска тела $S_{4,2}$, отражающая его сборку

1.3.2 Соединения 2-составного и 2-составного тел

$S_{2,2}$, 2 треугольника, ромб, квадрат:
 $S_{2,2}$, треугольник; $S_{2,2} + S_{2,2}''' = S_{4,2}$;
 $S_{2,2}$, квадрат; $S_{2,2} + S_{2,2}^{iv} = S_{4,3}$.

Поскольку группа симметрий ромба, не переворачивающих его, есть четверная группа Клейна, порожденная отражениями от перпендикулярных ромбу и содержащих его диагонали плоскостей, то существует четыре соединения наклонных призм $S_{2,2}$ ромбическими гранями. Из них выпуклыми являются 3 следующих тела:

$$S_{4,4} = S_{2,2} + S_{2,2}, S_{4,5} = S_{2,2} + S_{2,2}', S_{4,6} = S_{2,2} + S_{2,2}''.$$

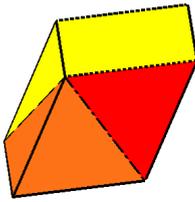


Рис. 5: $S_{4,4} = P_{4,3}$

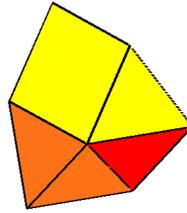


Рис. 6: $S_{4,5} = P_{4,31}$

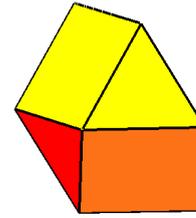


Рис. 7: Тело $S_{4,6}$

1.4 5-составные тела

1.4.1 Соединения 4-составного и 1-составного тел

- $S_{4,1}$, треугольник, ромб, трапеция:
 M_1 , треугольник; $S_{5,1} = S_{4,1} + M_1$;
- $S_{4,4}$, квадрат, ромб:
 M_2 , квадрат; $S_{5,2} = S_{4,4} + M_2$.

1.5 6-составные тела

1.5.1 Соединения 5-составного и 1-составного тел

- $S_{5,1}$, 2 треугольника, трапеция:
 M_1 , треугольник; $S_{6,1} = S_{5,1} + M_1$.
- $S_{5,2}$, треугольник, квадрат, ромб, трапеция:
 M_1 , треугольник; $S_{6,2} = S_{5,2} + M_1$;
 M_2 , квадрат; $S_{6,3} = S_{5,2} + M_2$.

1.5.2 Соединения 3-составного и 3-составного тел

$S_{3,1}$, треугольник, квадрат, трапеция:
 $S_{3,1}$, трапеция; $S_{6,4} = \circ S_{3,1} + S_{3,1}$;
 $S_{3,3}$, трапеция; $S_{6,5} = \circ S_{3,1} + S_{3,3}$.

1.6 7-составные тела

1.6.1 Соединения 6-составного и 1-составного тел

1. $S_{6,2}$, квадрат, ромб, параллелограмм, трапеция:
 M_1 , треугольник; $S_{7,1} = \circ S_{6,2} + M_1$.
2. $S_{6,5}$, квадрат, ромб, прямоугольник, 2 трапеции:
 M_2 , квадрат; $S_{7,2} = \circ S_{6,5} + M_2$.

1.6.2 Соединения 4-составного и 3-составного тел

$S_{4,6}$, треугольник, квадрат, трапеция:
 $S_{3,1}$, трапеция; $S_{6,4} = S_{4,6} + S_{3,1}$.

1.7 8-составные тела

1.7.1 Соединения 7-составного и 1-составного тел

1. $S_{7,1}$, 2 треугольника, ромб, параллелограмм, трапеция:
 M_1 , треугольник; $S_{8,1} = \circ S_{7,1} + M_1$.
2. $S_{7,2}$, 2 треугольника, прямоугольник, 2 трапеции:
 M_1 , треугольник; $S_{8,2} = \circ S_{7,2} + M_1$.
3. $S_{7,3}$, 2 треугольника, квадрат, шестиугольник:
 M_2 , квадрат; $S_{8,3} = S_{7,3} + M_2$.

1.7.2 Соединения 6-составного и 2-составного тел

1. $S_{6,2}$, квадрат, ромб, параллелограмм, трапеция:
 $S_{2,2}$, ромб; $S_{8,4} = \circ S_{6,2} + S_{2,2}$.
2. $S_{6,5}$ квадрат, ромб, прямоугольник, 2 трапеции:
 $S_{2,2}$, ромб; $S_{8,5} = \circ S_{6,5} + S_{2,2}$.

1.7.3 Соединения 5-составного и 3-составного тел

$S_{5,1}$, 2 треугольника, трапеция:
 $S_{3,1}$, трапеция; $S_{8,6} = \circ S_{5,1} + S_{3,1}$.

1.8 9-составные тела

1.8.1 Соединения 8-составного и 1-составного тел

$S_{8,3}$, 2 треугольника, квадрат, ромб, шестиугольник:
 M_2 , квадрат; $S_{9,1} = \circ S_{8,3} + M_2$.

1.8.2 Соединения 6-составного и 3-составного тел

$S_{6,5}$, квадрат, ромб, прямоугольник, 2 трапеции:
 $S_{3,1}$, трапеция; $S_{9,2} = \circ S_{6,5} + S_{3,1}$;
 $S_{3,3}$, трапеция; $S_{9,3} = \circ S_{6,5} + S_{3,3}$.

1.9 10-составные тела

1.9.1 Соединения 9-составного и 1-составного тел

1. $S_{9,1}$, треугольник, квадрат, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{10,1} =^\circ S_{9,1} + M_1;$$

$$M_2, \text{ квадрат; } S_{10,2} =^\circ S_{9,1} + M_2.$$

2. $S_{9,3}$, 2 квадрата, трапеция:

$$M_2, \text{ квадрат; } S_{10,3} =^\circ S_{9,3} + M_2.$$

1.9.2 Соединения 8-составного и 2-составного тел

- $S_{8,3}$, 2 треугольника, квадрат, ромб, шестиугольник;
 $S_{2,2}$, ромб; $S_{10,4} =^\circ S_{8,3} + S_{2,2}$.

1.9.3 Соединения 5-составного и 5-составного тел

- $S_{5,1}$, 2 треугольника, трапеция;
 $S_{5,1}$, треугольник; $S_{10,5} =^\circ S_{5,1} + S_{5,1}$.

1.10 11-составные тела

1.10.1 Соединения 10-составного и 1-составного тел

1. $S_{10,1}$, треугольник, квадрат, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:

$$M_2, \text{ квадрат; } S_{11,1} =^\circ S_{10,1} + M_2.$$

2. $S_{10,4}$, треугольник, квадрат, прямоугольник, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:

$$M_2, \text{ квадрат; } S_{11,2} =^\circ S_{10,4} + M_2.$$

3. $S_{10,5}$, треугольник, трапеция:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{11,3} =^\circ S_{10,5} + M_1.$$

1.11 12-составные тела

1.11.1 Соединения 11-составного и 1-составного тел

1. $S_{11,2}$, треугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{12,1} =^\circ S_{11,2} + M_1.$$

2. $S_{11,3}$, 2 треугольника, трапеция:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{12,2} =^\circ S_{11,3} + M_1.$$

1.11.2 Соединения 9-составного и 3-составного тел

1. $S_{9,1}$, треугольник, квадрат, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:

$$S_{3,1}, \text{ трапеция; } S_{12,3} = S_{9,1} + S_{3,1};$$

$$S_{3,1}, \text{ трапеция; } S_{12,4} =^\circ S_{9,1} + S'_{3,1};$$

2. $S_{9,3}$, 2 квадрата, трапеция:

$$S_{3,1}, \text{ трапеция; } S_{12,5} =^\circ S_{9,3} + S_{3,1}.$$

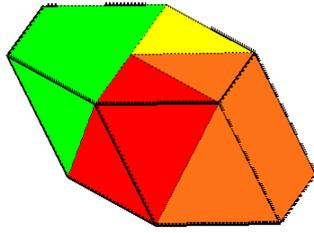


Рис. 8: $S_{12,3} = Q_1 = S_{9,1} + S_{3,1}$

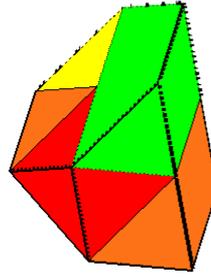


Рис. 9: $S_{12,4} = S_{9,1} + S'_{3,1}$

1.12 13-составные тела

1.12.1 Соединения 12-составного и 1-составного тел

1. $S_{12,3}$, квадрат, ромб, шестиугольник:
 M_2 , квадрат; $S_{13,1} = S_{12,3} + M_2$.
2. $S_{12,4}$, треугольник, прямоугольник, трапеция, шестиугольник:
 M_1 , треугольник; $S_{13,2} = S_{12,4} + M_1$.

1.12.2 Соединения 10-составного и 3-составного тел

$S_{10,4}$, треугольник, квадрат, прямоугольник, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:
 $S_{3,1}$, трапеция; $S_{13,3} = S_{10,4} + S_{3,1}$.

1.13 14-составные тела

1.13.1 Соединения 13-составного и 1-составного тел

1. $S_{13,1}$, треугольник, квадрат, трапеция, ромб, пятиугольник, шестиугольник:
 M_1 , треугольник; $S_{14,1} = S_{13,1} + M_1$;
 M_2 , квадрат; $S_{14,2} = S_{13,1} + M_2$.
2. $S_{13,3}$, треугольник, квадрат, 2 трапеции, прямоугольник, шестиугольник:
 M_2 , квадрат; $S_{14,3} = S_{13,3} + M_2$.

1.13.2 Соединения 12-составных и 2-составных тел

$S_{12,3}$, квадрат, ромб, шестиугольник:
 $S_{2,2}$, ромб; $S_{14,4} = S_{12,3} + S_{2,2}$.

1.13.3 Соединения 7-составных и 7-составных тел

$S_{7,3}$, 2 треугольника, квадрат, шестиугольник:
 $S_{7,3}$, шестиугольник; $S_{14,5} = S_{7,3} + S_{7,3}$;
 $S_{7,3}$, шестиугольник; $S_{14,6} = S_{7,3} + S'_{7,3}$.

2 Следствие теоремы и замечания о её модификации

2.1 О разбиениях многогранников теоремы

В предложенном выше доказательстве опущены описания соединений, которые приводили к построенным ранее многогранникам. Такая информация о разбиениях многогранников теоремы представлена ниже:

$S_{3,2} = S_{2,3} + M_1$, $S_{4,1} = S_{3,2} + M'_1 = S_{2,2} + S'''_{2,2}$, $S_{4,2} = S_{2,2} + S^{iv}_{2,2}$, $S_{4,3} = S_{2,2} + S^v_{2,2}$, $S_{6,1} = S_{3,1} + S'_{3,1}$, $S_{10,1} = S_{6,2} + S_{4,1} = S_{6,5} + S_{4,2} = S_{5,1} + S_{5,2}$, $S_{10,4} = S_{6,2} + S_{4,2}$, $S_{10,4} = S_{6,2} + S_{4,6}$, $S_{10,2} = S_{6,3} + S_{4,1}$, $S_{11,1} = S_{10,2} + M_1 =$

$$S_{8,2} + S_{3,3} = S_{7,1} + S_{4,1} = S_{7,2} + S_{4,2} = S_{6,3} + S_{5,1}, S_{11,2} = S_{9,1} + S_{2,2} = S_{7,1} + S_{4,2} = S_{7,2} + S_{4,1} = S_{6,2} + S_{5,2},$$

$$S_{11,3} = S_{6,1} + S_{5,1}, S_{12,1} = S_{10,1} + S_{2,2} = S_{10,4} + S_{2,2} = S_{8,1} + S_{4,2} = S_{8,5} + S_{4,2} = S_{6,2} + S_{6,2}, S_{12,2} = S_{6,1} + S_{6,1},$$

$$S_{12,4} = S_{9,2} + S_{3,3}, S_{12,3} = S_{6,2} + S'_{6,2} = S_{6,5} + S_{6,5}, S_{13,2} = S_{10,1} + S_{3,3} = S_{10,4} + S_{3,3} = S_{9,2} + S_{4,2} =$$

$$S_{8,2} + S_{5,1} = S_{7,2} + S_{6,1}, S_{13,1} = S_{9,1} + S_{4,1} = S_{7,1} + S_{6,2}, S_{14,1} = S_{12,3} + S'_{2,2} = S_{9,1} + S_{5,1} = S_{8,1} + S_{6,2} =$$

$$S_{8,2} + S_{6,5}, S_{14,2} = S_{11,2} + S_{3,3} = S_{10,2} + S_{4,1} = S_{7,1} + S_{7,1} = S_{7,2} + S_{7,2}, S_{14,3} = S_{10,1} + S_{4,6} = S_{10,4} + S_{4,2},$$

$$S_{14,4} = S_{11,2} + S_{3,1} = S_{10,1} + S_{4,2} = S_{8,2} + S_{6,2} = S_{8,5} + S_{6,5}.$$

2.2 Приспособление доказательства теоремы для его автоматизации. Обобщения теоремы

Уже в существующем виде доказательство теоремы частично автоматизировано, потому что, во-первых, алгебраическая модель каждого многогранника теоремы представлена в системах компьютерной алгебры GAP и Maple. Во-вторых, процесс соединения нетрудно алгоритмизировать: 1) упорядочить списки фундаментальных граней каждой фигуры и образы каждой такой грани при действии не переворачивающими ее симметриями, которые, в свою очередь, не являются симметриями присоединяемого по этой грани тела; 2) выяснить существование построенного многогранника среди ранее созданных.

Описанное выше доказательство опирается на то, что угол между смежными гранями многогранника теоремы получен соединением двугранных углов, образованных смежными гранями правильных пирамид. В общем случае, при добавлении к правильным пирамидам других выпуклых многогранников с паркетными гранями, число таких двугранных углов и их комбинаций заметно увеличится [1].

Благодарности

Отметим вклад лиц, участвовавших в доказательстве теоремы. Студенты Сибирского федерального и Красноярского государственного педагогического университетов построили компьютерные модели некоторых составленных из не более 7 пирамид многогранников теоремы. Особенно активной среди них была Т. А. Омельчук. Авторы выражают благодарность всем названным участникам исследования.

Авторы благодарны организаторам 47-й Международной молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики и её приложений» за прекрасные условия представления и оформления результатов настоящей работы. Особо благодарим рецензента, поскольку устранение замеченных им недоработок позволило улучшить качество статьи.

А.В. Тимофеев поддержан РФФИ, грант №15-01-04897.

Список литературы

- [1] V. A. Zalgaller. *Convex polyhedra with regular faces*. Semin. Steklov Math. Inst. Leningrad, 2. New York, Consultants Bureau, 1969.
- [2] J. A. Prjakhin. Convex polyhedra with faces having equal angles or constructed of these ones *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*. 45: 111–112 (1974) (in Russian). = Ю. А. Пряхин. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*, Т. 45: 111–112, 1974.
- [3] A. V. Timofeenko, O. A. Tabinova. Concerning classification of parquet polygons. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo Universiteta imeni V. P. Astafieva*. 1(23): 216–219, 2013 (in Russian). = А. В. Тимофеев, О. А. Табинова. О классификации паркетных многоугольников. *Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева*, 1(23): 216–219, 2013.
- [4] A. V. Timofeenko. To the list of Convex Regular-Hedron. *Sovremenniiye problemi matematiki i mekhaniki. Vol. VI(3). K 100-letiyu so dnya rojdenija N. V. Efimova. Pod redak. I. Kh. Sabitova i V. N. Chubarikova*. – Moscow, Izdat. Mosk. un-ta: 155–170, 2011 (in Russian). = А. В. Тимофеев. К перечню выпуклых правильных многогранников. *Современные проблемы математики и механики. Том VI. Выпуск 3. K 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова / Под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова*. – М.: Издательство Моск. ун-та: 155–170, 2011.
- [5] A. M. Gurin, V. A. Zalgaller. To history of studying convex polyhedra with regular faces and faces composed of regular ones. *Trudi matematicheskogo obshchestva Sankt-Peterburga*, 14: 215–294, 2008 (in Russian). = А. М. Гурин, В. А. Залгаллер. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных. *Труды Математического Общества Санкт-Петербурга*. Т. 14: 215–294, 2008.

- [6] E. G. Abubakirova. Partition of Archimedean solid M_{10} and Truncated tetrahedron M_4 into convex polyhedra with parquet faces. *Molodjuz i nauka: XVI Molodjoznii forum studentov, aspirantov i molodyikh uchyonih: materiali nauchno-prakticheskoi konferentsii, Krasnoyarsk*: 191–196, 2015 (in Russian). = Е. Г. Абубакирова. Разбиение архимедова тела M_{10} и усеченного тетраэдра M_4 на выпуклые многогранники с паркетными гранями. *Молодёжь и наука: XVI Молодежный форум студентов, аспирантов и молодых ученых: материалы научно-практической конференции, Красноярск*, 191–196, 2015.
- [7] E. S. Okladnikova. Partition of Ivanov solid Q_1 into piramids with regular faces. *Molodjuz i nauka XXI veka: materiali XIV Mejdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov, aspirantov i molodyikh uchyonih: v 5 t., Krasnoyarsk*: 130–131, 2013 (in Russian). = Е. С. Окладникова. Разбиение многогранника Иванова Q_1 на правильные пирамиды. *Молодежь и наука XXI века: материалы XIV Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: в 5 т. Красноярск*, 130–131, 2013.

About convex connections of regular-faced pyramids

*Egor V. Poltanov*¹, *Darya N. Sudak*², *Aleksei V. Timofeenko*², *Aleksandra V. Yakusheva*¹

1 – School 149 (Krasnoyarsk, Russia)

2 – Siberian Federal University (Krasnoyarsk, Russia)

Keywords: parquet polygon, convex polyhedron, regular-faced pyramid, symmetry group.

A convex polyhedron with edges of length one or two is composed of no more than fourteen regular-faced pyramids with single edges if and only if it is one of 57 polyhedra. Each of them is represented by formula or projections.