

**Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А.**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

## **ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ\***

### **АННОТАЦИЯ**

*Рассматриваются подходы к построению многослойных приближённых решений дифференциальных уравнений. Эти подходы основаны на классических приближённых методах. В отличие от классических подходов в результате вычислений получаются не поточечные приближения, а приближённые решения в виде функций. Данные методы могут быть применены для генерации сколь угодно точных приближённых нейросетевых решений без трудоёмкой процедуры обучения. Проведены вычислительные эксперименты на тестовых задачах.*

### **КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА**

*Нейронные сети; приближенные решения; дифференциальные уравнения.*

**Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Tatyana Shemyakina**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

## **APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS**

### **ABSTRACT**

*Original approaches to building multi-layered approximate solutions of differential equations are discussed. These approaches are based on classical approximate methods. In contrast to classical approaches, we obtain as the result of the calculation not pointwise approximations but approximate solutions as functions. These methods can be applied for generating arbitrarily accurate approximate neural network solutions without time-consuming learning procedure. Computational experiments were carried out on several test problems.*

### **KEYWORDS**

*Neural networks; approximate solutions; differential equations.*

### **Введение**

Мы неоднократно отмечали в качестве одного из преимуществ нейросетевого моделирования над классическими подходами к построению приближённых решений дифференциальных уравнений (типа метода сеток) то обстоятельство, что нейросетевой подход позволяет получить решение в виде аналитической формулы, а не набора числовых значений [1-5, 7-14]. В данной работе показано, что это не совсем верно: задаваемые аналитически приближения для решения можно получить на основе более общих подходов, куда нейросетевой входит как частный случай. На примере обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода Эйлера и некоторых его обобщений получены приближённые аналитические решения. Обычные оценки точности исходных классических методов позволяют получить удобные оценки точности полученных приближений.

Данный подход несложно распространить и на другие алгоритмы подобного типа. Так, например, этот подход распространяется на сеточные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. С помощью данного подхода, в частности, можно получить многослойные нейросетевые приближённые решения дифференциальных уравнений без трудоёмкой процедуры обучения. Получившиеся таким образом нейронные сети можно обучить с помощью классических методов [6].

---

\* Труды XI Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (SITITO'2016), Москва, Россия, 25-26 ноября, 2016

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (1)$$

на промежутке  $D = [x_0; x_0 + a]$ . Здесь  $x \in D \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Классический метод Эйлера состоит в разбиении промежутка  $D$  на  $n$  частей:  $x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = x_0 + a$ , и применении итерационной формулы

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h_k \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k), \quad (2)$$

где  $h_k = x_{k+1} - x_k$ ;  $\mathbf{y}_k$  - приближение к точному значению искомого решения  $\mathbf{y}(x_k)$ .

Известна оценка получившихся приближений в виде

$$\|\mathbf{y}(x_k) - \mathbf{y}_k\| \leq C \max(h_k), \quad (3)$$

где постоянная  $C$  зависит от оценок функции  $\mathbf{f}$  и её производных в области, в которой находится решение [6].

С помощью формулы (2) будем строить приближённое решение задачи (1) на интервале  $\tilde{D} = [x_0, x]$  с переменным верхним пределом  $x \in [x_0, x_0 + a]$ . При этом  $h_k = h_k(x)$ ,  $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k(x)$ ,  $\mathbf{y}_0(x) = \mathbf{y}_0$  и в качестве приближённого решения предлагается использовать  $\mathbf{y}_n(x)$ .

Самый простой вариант алгоритма получается при равномерном разбиении промежутка с шагом  $h_k(x) = (x - x_0) / n$ . Такой вариант применялся при тестировании алгоритма.

В качестве тестовой была выбрана задача о нелинейных колебаниях маятника

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha \sin(y) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Перепишем постановку (4) в виде системы дифференциальных уравнений. Для этого

введём вектор  $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$  и вектор  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), y_2(x)) \\ f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ -\alpha \sin(y_1(x)) \end{pmatrix}$ ,

тогда (4) примет вид системы (1) с условием Коши  $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . В дальнейших рассмотрениях под приближёнными решениями  $y_n(x)$  подразумеваются первые компоненты  $\mathbf{y}_n(x)$ .

Представим некоторые результаты вычислительных экспериментов, проведённых в среде Mathematica 10. Рассматривали две серии вычислительных экспериментов: первый - для случая  $x \in [0; 1]$ ,

второй - для случая  $x \in [0; 5]$ . Параметр  $\alpha = 1, 2, 3$ . Количество разбиений  $n = 2, 3, 5, 10, 15$ .

### Вычислительные эксперименты

**Результаты вычислительных экспериментов для промежутка  $[0, 1]$ .**

Применяем метод Эйлера (2) при  $n = 2$ , тогда получаем формулу

$$y_n(x) = 1 - 0.25x^2 \alpha \sin 1 \quad (5)$$

Графики данного приближённого решения  $y_n(x)$  и решения  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью встроеной операции Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$  выглядят следующим образом:

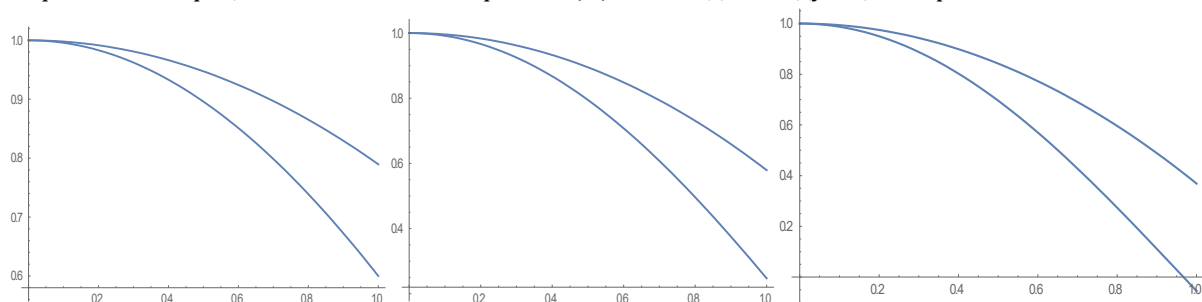


Рис. 1. Графики приближённого решения  $y_n(x)$  из (5) и  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$

На рис.1 видим, что точность приближенного решения неудовлетворительная, хотя характер решения отражается верно. С увеличением количества разбиений  $n = 5$  получим формулу

$$y_n(x) = 1 - 0.04 \left( 7x^2 \alpha \sin 1 + x^2 \alpha \sin \left[ 1 - 0.12x^2 \alpha \sin 1 \right] + 2x^2 \alpha \sin \left[ 1 - 0.04x^2 \alpha \sin 1 \right] \right) \quad (6)$$

Графики данного приближённого решения  $y_n(x)$  и решения  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$  существенно ближе друг к другу:

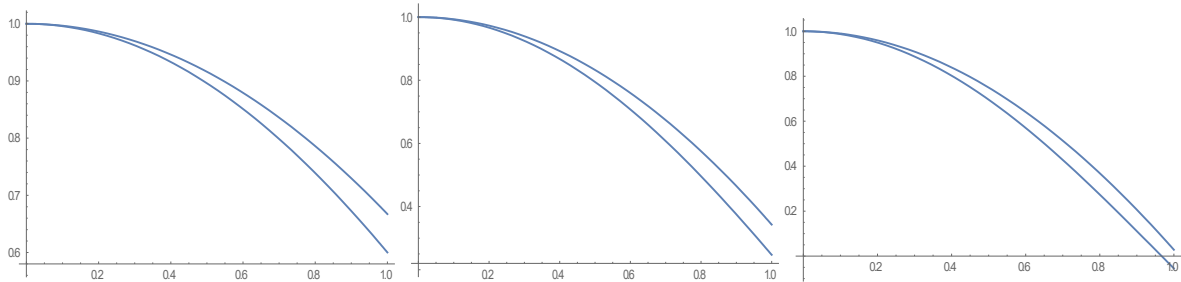


Рис. 2. Графики приближённого решения  $y_n(x)$  из (6) и  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$

Дальнейшее увеличение количества разбиений  $n$  приводит к постепенному повышению точности и усложнению вида полученного приближённого решения. При этом точность формул растёт как первая степень  $n$  в соответствии с оценкой (3).

Более точные формулы получаются при применении методов второго порядка, для которых оценка (3) заменяется оценкой  $\|y(x_k) - y_k\| \leq C \max(h_k)^2$ .

Одним из методов такого типа является уточнённый метод Эйлера, для которого формула (2) заменяется формулой из книги [6]

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h_k f(x_k, y_k), \quad (7)$$

при этом  $y_1 = y_0 + h_1 f(x_0 + \frac{h_1}{2}, y_0 + \frac{h_1}{2} f(x_0, y_0))$ .

Применяем уточнённый метод Эйлера (7) при  $n = 2$ , тогда получаем формулу

$$y_n(x) = 1 - 0.5x^2 \alpha \sin 1 \quad (8)$$

Графики данного приближённого решения  $y_n(x)$  и решения  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$  выглядят следующим образом:

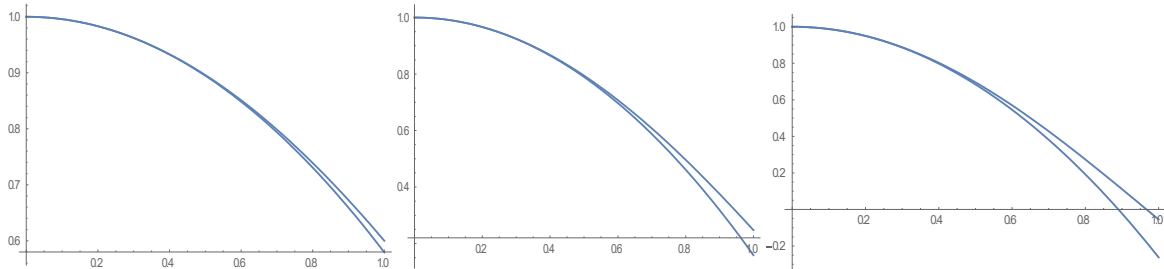


Рис. 3. Графики приближённого решения  $y_n(x)$  из (8) и  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$

На рис.3 видим, что точность приближённого решения  $y_n(x)$  из формулы (8) существенно выше, чем приближённого решения, полученного применением метода Эйлера по формуле (6).

С увеличением количества разбиений  $n = 5$  уточнённый метод Эйлера (7) представим формулой

$$y_n(x) = 1 - 0.0168x^2 \alpha - 0.32x^2 \alpha \sin \left[ 1 - 0.0168x^2 \alpha \right] - 0.16x^2 \alpha \sin \left[ 1 - 0.0168x^2 \alpha - 0.16x^2 \alpha \sin \left[ 1 - 0.0168x^2 \alpha \right] \right] \quad (9)$$

Графики данного приближённого решения  $y_n(x)$  и решения  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$  практически сливаются:

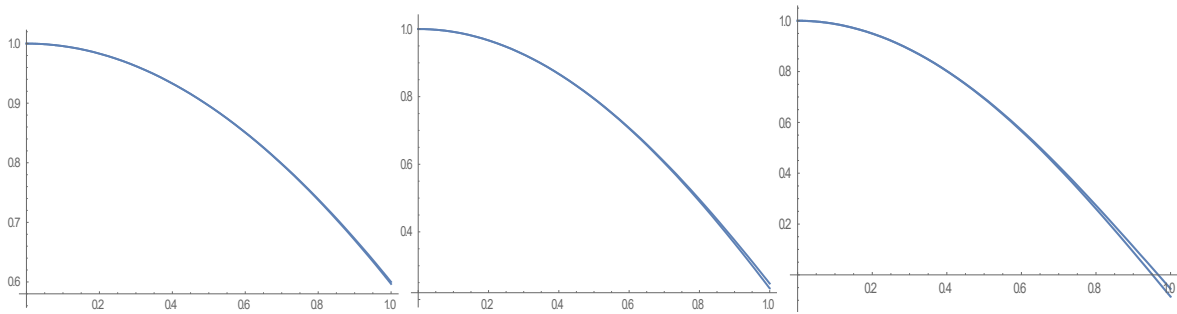


Рис. 4. Графики приближённого решения  $y_n(x)$  из (9) и  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$

Рассмотрим метод средней точки из книги [6]:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h_k \mathbf{f}\left(x_k + \frac{h_k}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{h_k}{2} \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k)\right) \quad (10)$$

Применяем метод средней точки (10) при  $n = 2$ , тогда получаем формулу

$$y_n(x) = 1 - 0.316x^2\alpha - 0.125x^2\alpha \sin[1 - 0.105x^2\alpha] \quad (11)$$

Графики данного приближённого решения  $y_n(x)$  и решения  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$  выглядят следующим образом:

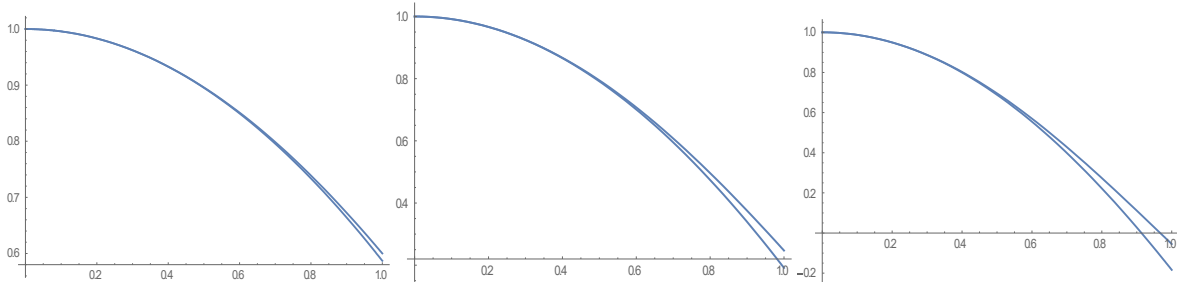


Рис. 5. Графики приближённого решения  $y_n(x)$  из (11) и  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$

Точность приближённого решения (11) ещё выше, чем у формулы, получающейся применением уточнённого метода Эйлера (7) – (9). Применяем метод средней точки (10) при  $n = 5$ , тогда получаем формулу

$$\begin{aligned} y_n(x) = & 1 - 0.151x^2\alpha - 0.12x^2\alpha \sin[1 - 0.0337x^2\alpha] - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha] - \\ & - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.05x^2\alpha - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha]] - \\ & - 0.08x^2\alpha \sin[1 - 0.0673x^2\alpha - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0337x^2\alpha] - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha]] - \\ & - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0841x^2\alpha - 0.04x^2\alpha \sin[1 - 0.0337x^2\alpha] - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha] - \\ & - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.05x^2\alpha - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha]]] - \\ & - 0.04x^2\alpha \sin[1 - 0.1x^2\alpha - 0.06x^2\alpha \sin[1 - 0.0337x^2\alpha] - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha] - \\ & - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.05x^2\alpha - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha]]] - \\ & - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0673x^2\alpha - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0337x^2\alpha] - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha]] - \\ & - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.119x^2\alpha - 0.08x^2\alpha \sin[1 - 0.0337x^2\alpha] - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha] - \\ & - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.05x^2\alpha - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha]]] - \\ & - 0.04x^2\alpha \sin[1 - 0.0673x^2\alpha - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0337x^2\alpha] - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha]] - \\ & - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0841x^2\alpha - 0.04x^2\alpha \sin[1 - 0.0337x^2\alpha] - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha] - \\ & - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0505x^2\alpha - 0.02x^2\alpha \sin[1 - 0.0168x^2\alpha]]] \end{aligned}$$

Графики данного приближённого решения  $y_n(x)$  из последней формулы и решения  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$  практически сливаются.

Рассматриваем ещё один метод, подобный выше тестируемому, это метод Хойна из книги [6]:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h_k}{2} [\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k) + \mathbf{f}(x_k + h_k, \mathbf{y}_k + h_k \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k))]. \quad (12)$$

Результаты применения метода Хойна (12) к рассматриваемой задаче (4) аналогичны результатам применения метода средней точки (10).

Рассмотрим тесты исправленного метода Эйлера, который работает в соответствии с формулой:

$$y_{k+1} = y_k + h_k \left[ f(x_k, y_k) + \frac{h_k}{2} (f'_x(x_k, y_k) + f'_y(x_k, y_k)) f(x_k, y_k) \right] \quad (13)$$

Применение данного метода к рассматриваемой задаче (4) даёт такие же результаты, как и у предыдущих методов средней точки (10) и Хойна (12).

Приведём результаты для стандартного решения задачи (4), полученного с помощью разложения в степенной ряд в окрестности  $x_0 = 0$  для  $n = 6$

$$y_n(x) = 1 - 0.5\alpha \sin 1 x^2 + \alpha^2 \sin 2 x^4 / 12 + \alpha^3 \sin 1 x^6 (3\sin^2 1 - \cos^2 1) / 720. \quad (14)$$

Заметим, что первые два слагаемых совпадают с результатом, полученным с помощью формулы (8) уточнённого метода Эйлера для  $n = 2$

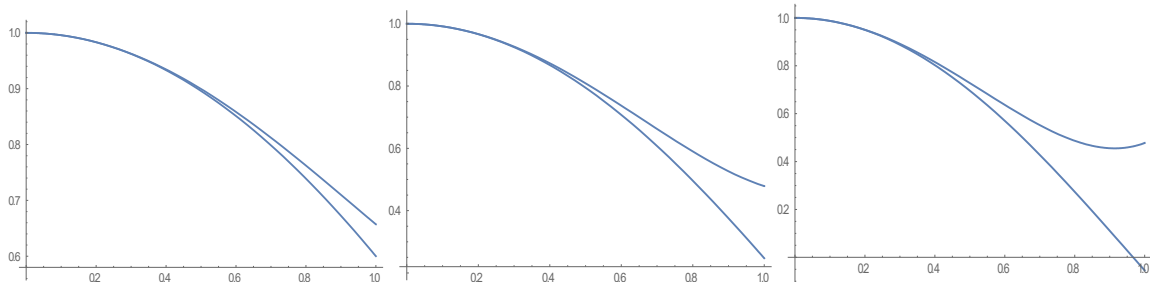


Рис. 6. Графики приближённого решения  $y_n(x)$  из (14) и  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью Mathematica 10, при  $\alpha = 1; 2; 3$

На рис.6 видим, что во второй половине промежутка приближенное решение (14) проигрывает в точности всем приведённым выше решениям, кроме решения, полученного (5) методом Эйлера для разбиения  $n = 2$ .

#### Результаты вычислительных экспериментов для промежутка $[0, 5]$ .

Приведём результаты для значений параметра  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 3$ .

Графики приближённого решения  $y_n(x)$ , полученного по формуле (14), и решения  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10, при  $\alpha = 1$  выглядят следующим образом:

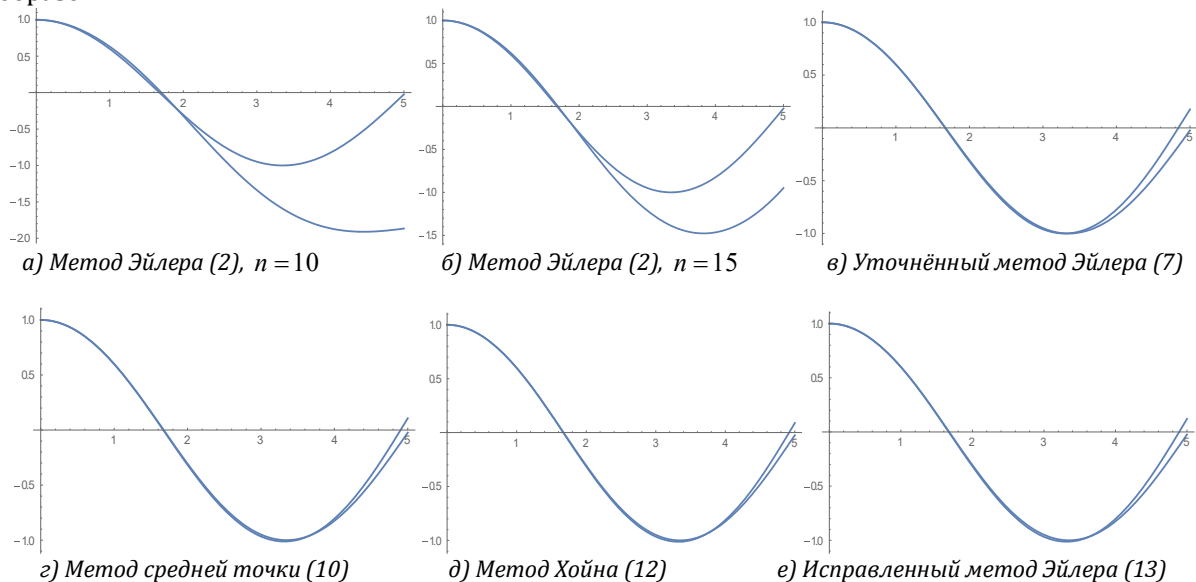


Рис. 7. Графики приближённого решения  $y_n(x)$  из (14) и  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью Mathematica 10, при  $\alpha = 1$  и для (в), г), д), е) -  $n = 10$

На рис.7 видим, что метод Эйлера (2) существенно проигрывает всем остальным методам, причём ситуацию не спасает значительное увеличение числа разбиений  $n$ .

Графики приближённого решения  $y_n(x)$ , полученного по формуле (14), и решения  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью встроенной операции Mathematica 10, при  $\alpha = 3$  выглядят следующим образом:

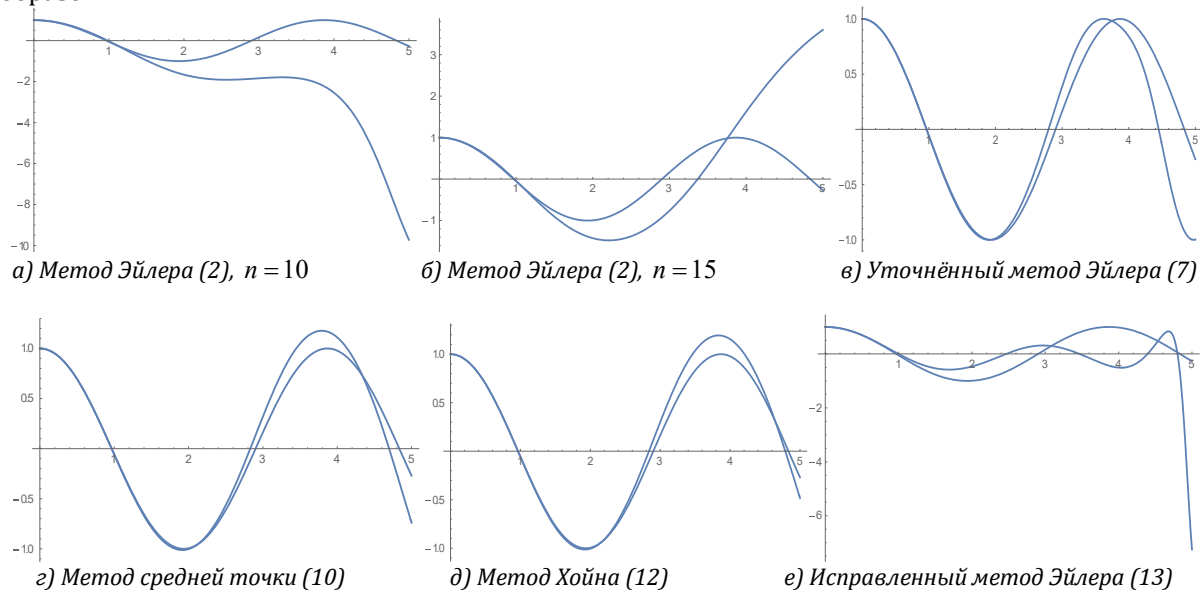


Рис. 8. Графики приближённого решения  $y_n(x)$  из (14) и  $\bar{y}(x)$ , построенного с помощью Mathematica 10 при  $\alpha = 3$  и для (в), (г), (д), (е)) -  $n = 10$

На рис.8 видим, что в данном случае лучше всего работает метод Хойна (12).

По данным графикам может сложиться неверное представление о сравнительной эффективности методов: более точными представляются (2), (7), (10), (12), (13). Однако уточнённый метод Эйлера (7) при  $n = 10$  даёт вполне обозримое приближение:

$$\begin{aligned}
 y_n(x) = & 0.02(50 - 5x^2\alpha \sin 1 - 8x^2\alpha \sin[1 - 0.02x^2\alpha \sin 1] - \\
 & - 6x^2\alpha \sin[0.04(25 - x^2\alpha \sin 1 - x^2\alpha \sin[-0.02x^2\alpha \sin 1])] - \\
 & - 4x^2\alpha \sin[0.02(50 - 3x^2\alpha \sin 1 - 4x^2\alpha \sin[1 - 0.02x^2\alpha \sin 1]) - \\
 & - 2x^2\alpha \sin[0.04(25 - x^2\alpha \sin 1 - x^2\alpha \sin[1 - 0.02x^2\alpha \sin 1])]) - \\
 & - 2x^2\alpha \sin[0.04(25 - 2x^2\alpha \sin 1 - 3x^2\alpha \sin[1 - 0.02x^2\alpha \sin 1]) - \\
 & - 2x^2\alpha \sin[0.04(25 - x^2\alpha \sin 1 - x^2\alpha \sin[1 - 0.02x^2\alpha \sin 1])] - \\
 & - x^2\alpha \sin[0.02(50 - 3x^2\alpha \sin 1 - 4x^2\alpha \sin[1 - 0.02x^2\alpha \sin 1]) - \\
 & - 2x^2\alpha \sin[0.04(25 - x^2\alpha \sin 1 - x^2\alpha \sin[1 - 0.02\sin 1])])]).
 \end{aligned}$$

Методы, использующие формулы (10) – метод средней точки, (12) – метод Хойна, (13) – исправленный метод Эйлера, дают существенно более сложные аналитические выражения.

### Дальнейшее развитие

Первым направлением развития является включение начальных условий в параметры решения. Так, например, в качестве обобщения задачи (4) получаем

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha \sin(y) = 0, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1. \end{cases}$$

Методом Эйлера при  $n = 3$  получаем приближённое решение

$$y_0 + y_1 x - \frac{2}{9} x^2 \alpha \sin y_0 - \frac{1}{9} x^2 \alpha \sin \left[ y_0 + \frac{y_1 x}{3} \right],$$

а при  $n = 5$  – приближённое решение

$$y_0 + y_1 x - \frac{1}{25} (4x^2 \alpha \sin[y_0] + 3x^2 \alpha \sin[y_0 + \frac{y_1 x}{5}] + 2x^2 \alpha \sin[y_0 + \frac{2y_1 x}{5} - \frac{1}{25} x^2 \alpha \sin[y_0]]) + x^2 \alpha \sin[y_0 + \frac{3y_1 x}{5} - \frac{2}{25} x^2 \alpha \sin[y_0] + \frac{1}{25} x^2 \alpha \sin[y_0 + \frac{y_1 x}{5}]].$$

Аналогичные результаты можно получить, применяя и другие методы, приведённые выше. Подобные параметрические решения можно применить для решения краевых задач. Например, задачу

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha \sin(y) = 0, \\ y(0) = y_0, y(a) = y_a, \end{cases}$$

можно решать, определяя  $y_1$  из уравнения  $y(a) = y_a$ , используя в качестве  $y(x)$  полученное параметрическое решение.

*Второе направление* развития связано с тем, что в формуле (2) и других аналогичных формулах используется не сама функция  $f(x, y)$ , а её нейросетевое приближение. Подобный вариант может возникать, например, когда функция  $f(x, y)$  задана таблично или получается решением некоторой другой задачи, когда это решение целесообразно искать в классе нейросетевых функций. В результате даже для однослойных нейросетевых функций  $f(x, y)$  получаем решение в виде многослойной нейронной сети.

*Третье направление* получается при оптимизации расстановки точек  $x_k$  исходя из минимизации подходящего функционала ошибки. Данное направление можно развить, заменив числовые значения в полученных выше аналитических приближённых решениях параметрами и подбирая эти параметры минимизацией функционала ошибки, используя исходные числовые значения как начальные приближения. При использовании нейронной сети, как это было указано выше, в результате такого подхода получаем обычную процедуру обучения.

*Четвёртое направление* связано с распространением изложенного подхода на уравнения в частных производных. Для этого можно применить, например, метод прямых.

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №14-01-00660 и №14-01-00733).*

## Литература

1. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Гибридный метод построения параметрической нейросетевой модели катализатора// Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2014. – №10. – С.476–484.
2. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Модель неизоэнтальпического химического реактора на основе параметрических нейронных сетей. Гибридный метод// Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2015. – Т.2. №11. – С.271–278.
3. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Многоуровневые модели окружающей среды в мегаполисах// Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2015. – Т. 2. № 11. – С. 267-270.
4. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Мезо-уровневая нейросетевая модель загрязнения атмосферного воздуха Санкт-Петербурга по данным мониторинга// Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2015. – Т. 2. № 11. – С. 279-283.
5. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Нейросетевой подход к задачам математической физики. – СПб.: «Нестор-История», 2015. – 260 с.
6. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Оникс 21 век, 2005. – 400 с.
7. Романова А.Г., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. О применении нейросетевых моделей в экологии// Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2013. – № 9. – С.534–539.
8. Budkina E. M., Kuznetsov E. B., Lazovskaya T. V., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. Neural Network Technique in Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISNN 2016, LNCS 9719. 2016. – pp. 277–283.
9. Gorbachenko V. I., Lazovskaya T. V., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N., Zhukov M.V. Neural Network Technique in Some Inverse Problems of Mathematical Physics // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISNN 2016, LNCS 9719. 2016. – pp. 310–316.
10. Kainov N.U., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. Application of neural network modeling to identification and prediction problems in ecology data analysis for metallurgy and welding industry// Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2014. – vol. 17, 1. – pp. 57-63.
11. Lazovskaya T.V., Tarkhov D.A. Fresh approaches to the construction of parameterized neural network solutions of a stiff differential equation. St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics (2015), <http://dx.doi.org/10.1016/j.spjpm.2015.07.005>
12. Shemyakina T. A., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N.// Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISNN 2016, LNCS 9719. 2016. – pp. 547–554.
13. Tarkhov D., Vasilyev A. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. I: Simple problems Optical Memory and Neural Networks (Information Optics), 2005. – 14. – pp. 59-72.

14. Tarkhov D., Vasilyev A. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. II: Complicated and nonstandard problems Optical Memory and Neural Networks (Information Optics), 2005. – 14. – pp. 97-122.
15. Vasilyev A., Tarkhov D. Mathematical Models of Complex Systems on the Basis of Artificial Neural Networks// Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2014. – vol. 17, 2. – pp. 327-335.

## References

1. Vasil'ev A.N., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. Gibridnyy metod postroeniya parametriceskoy neyrosetevoy modeli katalizatora// Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie, 2014. – №10. – S.476–484.
2. Vasil'ev A.N., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. Model' neizotermicheskogo khimicheskogo reaktora na osnove parametriceskikh neyronnykh setey. Gibridnyy metod// Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie, 2015. – T.2. №11. – S.271–278.
3. Vasil'ev A.N., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. Mnogourovnevye modeli okruzhayushchey sredy v megapolisakh// Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie, 2015. – T. 2. № 11. – S. 267-270.
4. Vasil'ev A.N., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. Mezo-urovnevaya neyrosetevaya model' zagryazneniya atmosfernogo vozdukhа Sankt-Peterburgа po dannym monitoringа// Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie, 2015. – T. 2. № 11. – S. 279-283.
5. Vasil'ev A.N., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. Neyrosetevoy podkhod k zadacham matematicheskoy fiziki. – SPb.: «Nestor-Istoriya», 2015. – 260 s.
6. Verzhbitskiy V.M. Chislennyye metody. Matematicheskyy analiz i obyknovennyye differentsial'nye uravneniya. – M.: Oniks 21 vek, 2005. – 400 s.
7. Romanova A.G., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. O primeneniі neyrosetevykh modeley v ekologii// Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie, 2013. – № 9. – S.534 –539.
8. Budkina E. M., Kuznetsov E. B., Lazovskaya T. V., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. Neural Network Technique in Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISNN 2016, LNCS 9719. 2016. – pp. 277–283.
9. Gorbachenko V. I., Lazovskaya T. V., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N., Zhukov M.V. Neural Network Technique in Some Inverse Problems of Mathematical Physics // Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISNN 2016, LNCS 9719. 2016. – pp. 310–316.
10. Kainov N.U., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. Application of neural network modeling to identification and prediction problems in ecology data analysis for metallurgy and welding industry// Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2014. – vol. 17, 1. – pp. 57-63.
11. Lazovskaya T.V., Tarkhov D.A.: Fresh approaches to the construction of parameterized neural network solutions of a stiff differential equation. St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics (2015), <http://dx.doi.org/10.1016/j.spjpm.2015.07.005>
12. Shemyakina T. A., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N.// Springer International Publishing Switzerland 2016 L. Cheng et al. (Eds.): ISNN 2016, LNCS 9719. 2016. – pp. 547–554.
13. Tarkhov D., Vasilyev A. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. I: Simple problems Optical Memory and Neural Networks (Information Optics), 2005. – 14. – pp. 59-72.
14. Tarkhov D., Vasilyev A. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. II: Complicated and nonstandard problems Optical Memory and Neural Networks (Information Optics), 2005. – 14. – pp. 97-122.
15. Vasilyev A., Tarkhov D. Mathematical Models of Complex Systems on the Basis of Artificial Neural Networks// Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2014. – vol. 17, 2. – pp. 327-335.

Поступила: 15.10.2016

### Об авторах:

**Васильев Александр Николаевич**, доктор технических наук, профессор кафедры «Высшая математика» Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (ФГАОУ ВО «СПбПУ»), a.n.vasilyev@gmail.com;

**Тархов Дмитрий Альбертович**, доктор технических наук, профессор кафедры «Высшая математика» Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (ФГАОУ ВО «СПбПУ»), dtarkhov@gmail.com;

**Шемякина Татьяна Алексеевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (ФГАОУ ВО «СПбПУ»), sh\_tat@mail.ru.