Прикладные проблемы решения задачи вписывания многогранников

Д. С. Кокорев

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Проблем Передачи Информации им. А.А.Харкевича Российской академии наук
Россия, 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д.19 стр. 1.

E-mail: korvin-d@yandex.ru

В статье рассматривается задача нахождения многогранников заданной формы внутри других многогранников. Данная задача является частным случаем третьей части 18-ой проблемы Гильберта. Она имеет практическое применение в компьютерном моделировании трехмерных объектов, решении задач раскроя и упаковки, автономном перемещении роботов, ювелирной промышленности. В статье предлагается метод нахождения вписанных многогранников, основанный на сведении задачи к задаче нелинейного программирования. Описываются основные функциональные ограничения, использующиеся для данной задачи и программные ресурсы, позволяющие эффективно работать с задачами нелинейного программирования. Приведенный метод требует довольно хорошее начальное решение. В качестве стартовой точки могут быть взяты данные работы других менее точных алгоритмов. Самым распространенным из таких алгоритмов является гомотетичное раздувание искомого объекта под разными углами и с центром масс в разных точках до пересечения с внешним многогранником. Описанию и недостаткам этих методов посвящена отдельная глава. Главным недостатком является локальность решения. А также необходимость в переборе жестко заданных форм многогранника. Предлагается аналог этих методов, основанный на задаче нелинейного программирования. Предложенный метод основывается на представлении любого возможного движения в виде композиции поворота, трансляции и гомотетии. В описанном эксперименте матрица поворота представлена через кватернионы. Придуманный алгоритм работает качественнее имеющихся аналогов, но пока недостаточно быстро для прикладных целей. Планы дальнейшего развития алгоритма описаны в заключении.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, выпуклые многогранники, комбинаторная структура, вписанный многогранник, задача нелинейного программирования, солвер

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда(№16-11-10352)

1. Введение

Одной из классических математических проблем является третья часть 18-ой проблемы Гильберта. В своей общей постановке она посвящается упаковкам одних тел другими. В случае упаковки правильными объектами, например, сферами, существуют доказанные результаты. Например: сильная проблема тринадцати сфер [Tarasov, 2010], проблема двадцати пяти сфер [Мусин, 2003] и гипотеза Кеплера [Hales, 1994]. Для случая двухмерных многогранников и простых трехмерных объектов есть ряд решенных задач. Подобные задачи перечислены в статье Валиахметовой Ю.И. и Филипповой А.С.[Валиахметова, Том 18, №1, стр 62]. В случае упаковки многомерных многогранников в другие многогранники, задача является значительно более сложной, и пока не существует теоретических подходов, позволяющих подступиться к этой задаче в общем виде.

Частным случаем этой проблемы является задача нахождения в выпуклом многограннике произвольной формы объекта заданной формы с наибольшим объемом. Описанные в статье подходы используются в прикладных целях, когда нужно из большого тела вырезать части определенной формы. Например, в ювелирной промышленности или при нарезке гранитных плит, удовлетворяющих заданным параметрам.

Первоначальным этапом алгоритма, решающего эту задачу, является нахождение стартовой точки - начального приблизительного расположения объекта. В качестве стартовой точки могут быть взяты данные работы других менее точных алгоритмов. Самым распространенным из таких алгоритмов является гомотетичное раздувание под разными углами и с центром масс в разных точках искомого объекта до пересечения с внешним многогранником. Таким образом находится стартовая точка с максимальным объемом, но строго зафиксированной формой. Далее необходимо двигая вершины на незначительные расстояния найти положение с максимальным объемом и удовлетворяющие некоторым требованиям на форму.

2. Используемые термины

Определение 1. *Вписыванием* одного многогранника в другой будем называть нахождение многогранника, комбинаторно эквивалентного первому, максимального объема и содержащегося во втором.

Определение 2. Будем говорить, что два многогранника обладают одинаковой *комбинаторной структурой* тогда и только тогда, когда изоморфны их граничные комплексы [Многогранники, графы, оптимизация, 1981]. Такие многогранники называются *комбинаторно эквивалентными*.

Определение 2.1. *Комплексом* называется конечная совокупность K многогранников в E_d, удовлетворяющая условиям: 1) наряду с каждым многогранником M из семейства K в K входит также и любая грань многогранника M; 2) пересечение любых двух многогранников из K является гранью каждого из них.

Определение 2.2. Пусть M — d-многогранник (размерности d) в E_d , и пусть целое число k удовлетворяет условию $0 < k < d$. Множество всех граней многогранника M размерности, не превышающей k, является комплексом, который называется *k-скелетом многогранника M*.

Определение 2.3. (d - 1)-скелет многогранника M будем обозначать символом $F(M)$ и называть *граничным комплексом многогранника*.

Определение 2.4. Два комплекса K и K' называются *изоморфными комплексами*, если между ними существует взаимно однозначное отображение φ, сохраняющее операцию включения:

$$F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow \varphi (F_1) \subset \varphi (F_2)$$

Определение 3. *Задачей нелинейного программирования (НП-задача)* называется оптимизационная задача следующего вида:

$f(x) \to min$

при ограничениях:

$gL \le g(x) \le gU$

$xL \le x \le xU$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – оптимизационные переменные с верхними и нижними ограничениями:

$xL \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$, $xU \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - целевая функция

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - общие нелинейные ограничения с верхними и нижними границами:

$gL \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^m$, $gU \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^m$

$f(x)$ и $g(x)$ могут быть линейными или нелинейными, выпуклыми или невыпуклыми.

Определение 4. *AMPL* [Fourer, 2003] (*A Modeling Language for Mathematical Programming*) — язык программирования высокого уровня для описания и решения сложных задач оптимизации и теории расписаний. Главным преимуществом AMPL является подобие его синтаксиса математической записи задач оптимизации, что позволяет дать очень краткое и легко читаемое определение задач математического программирования. Для решения задач, написанных на AMPL, используются вычислительные солверы.

Определение 5. *Нелинейный солвер* – программа для решения задач нелинейного программирования, использующая один из алгоритмов таких как: метод градиентного спуска, метод внутренней точки или квазиньютоновские методы.

Определение 6. *Выпуклой оболочкой* множества *X* называется наименьшее выпуклое множество, содержащее *X*.

3. Метод колебания вершин

Даны два выпуклых многогранника – внешний и внутренний. Внутренний многогранник является начальным приблизительным решением задачи и содержится внутри внешнего. Требуется максимально увеличить, незначительно изменяя положение вершин, внутренний многогранник так, чтобы он остался вписанным и сохранил свою комбинаторную структуру. Помимо комбинаторной структуры могут быть добавлены соотношения каких-либо размеров фиксирующих форму многогранника необходимые для прикладного использования алгоритма.

Поставленную геометрическую задачу необходимо записать в терминах задачи нелинейного программирования. В качестве целевой функции $f(x)$ в нашем случае берется объем внутреннего многогранника. Основными ограничениями $g(x)$ являются:

ограничения на сохранность комбинаторной структуры

ограничения на выпуклость внутреннего многогранника

ограничения на нахождение внутреннего многогранника внутри внешнего

Помимо обязательных ограничений, в зависимости от конкретной задачи, могут быть добавлены дополнительные ограничения, связанные с определенными размерами многогранника, которые должны сохраниться при колебании вершин или удовлетворять некоторым требованиям в результате решения задачи. В зависимости от степени доверия начальному решению вводятся ограничения xL и xU на переменные, отвечающие за координаты вершин внутреннего многогранника. Конечные координаты не должны отходить от начальных дальше, чем на величину *dx*. Чем меньше эта величина, тем быстрее будет решаться задача, что очень важно в прикладных целях.

Для вычислений сформулированной НП-задачи был использован солвер IPOPT(Internal Point OPTimization) [Kawajir, 2010]. Этот солвер предназначен для поиска локального оптимума в задаче нелинейного программирования методом внутренней точки. Для упрощения работы с солвером может быть использован язык программирования AMPL.

Метод был реализован и протестирован на задачах разного размера. Задачи варьировались от простых учебных примеров с простыми, подобными или просто легко вписываемыми многогранниками с количество вершин меньше пятидесяти до реальных прикладных задач с количеством вершин от ста до пятисот и ограничениями на симметрию разной жесткости. На реальных примерах данный метод улучшает любой результат других алгоритмов в исследуемой прикладной области на 2-5% объема.

Основные тестируемые примеры содержали вписываемый многогранник с количеством вершин и граней порядка 150 и внешний многогранник с количеством вершин и граней порядка 500, общее количество ограничений порядка 15000. Время построения задачи на этих примерах составляет около одной секунды. Время вычисления на солвере без ограничений на симметрию ~5 секунд. Время вычислений на солвере с ограничениями на симметрию 20-40 секунд в зависимости от жесткости ограничений.

В этой статье описаны только общие принципы работы этого метода, более подробно с методом можно ознакомиться в более ранних статьях автора [Кокорев, 2013], [Кокорев, 2016]. В них рассмотрено как эффективнее задавать разные ограничения в виде уравнений.

4. Проблемы нахождения начальной точки

В исследуемой отрасли самым распространенным алгоритмом для поиска максимального вписанного многогранника является перебор его возможных положений с отсечением случаев с заведомо маленьким объемом. Принцип работы алгоритма – есть жестко зафиксированная форма вписываемого тела, которая может подвергаться только повороту, трансляции и гомотетии. Внутри внешнего многогранника перебираются по сетке с заданным шагом возможные центры масс вписанного тела и его ориентация в пространстве. Для каждого центра масс и ориентации, тело увеличивается до пересечения с внешним многогранником. Случай, когда получается наибольший коэффициент увеличения является искомым максимальным решением. В такой упрощенной формулировке алгоритм работает слишком долго при маленьком шаге сетки и дает слабые результаты на большом шаге. Недостатки данного алгоритм можно исправить следующими способами.

Во-первых, необходимо максимально ускорить процедуру нахождения коэффициента увеличения. Для этого минимизируют вычислительную сложность компонент процедуры. Повышают эффективность работы с памятью. Используют различные способы более быстрого нахождения пересечения двух многогранников. Например, с помощью суммы Минковского, или с помощью представления границы в виду вокселей (многомерный пиксел).

Во-вторых, возможно улучшить обход по сетке центров масс и ориентаций. На основании ранее полученных результатов исключаются некоторые направления поиска. Оптимизируется последовательность обхода сетки. Кроме того, сетка может быть не стабильная, а меняться в зависимости от предыдущих результатов, в частности может уменьшаться шаг сетки, когда найдена зона локального максимума.

Чаще всего есть не одна форма вписываемого тела, а некоторый конечный набор форм. Это обусловлено тем, что вырезаемые объекты могут быть разной формы и необходимо оптимально использовать дорогостоящие материалы. Более слабые алгоритмы для каждой из форм запускаются отдельно. В более современных и развитых алгоритмах перебор форм участвует на ровне с перебором центра масс и ориентации, как еще одна размерность сетки перебора.

Наилучший алгоритм такого типа работает в среднем 10 секунд. Это время можно увеличить вдвое, если добиться значительно более хороших результатов по объему или более хорошего взаимодействия с методом колебания вершин

Описанные алгоритмы для нахождения начального приблизительного расположения объекта являются не надежными по двум основным причинам:

1) Они, как и любая оптимизация, находят локальный максимум. Кроме того, так как они работают с частными геометрическими объектами, а не с системами уравнений, то не

существует развитого математического аппарата для решения подобных задач. Поэтому эти алгоритмы работают на основе частных разработок, в которых из нескольких существующих локальных максимумов может находиться более плохой с точки зрения глобальности, чем в аналогичной системе линейных уравнений, решенной стандартными математическими методами.

2) Эти алгоритмы работают с набором жестко зафиксированных форм, которые может подвергаться только повороту, трансляции и гомотетии. В то время как метод колебания вершин может менять форму, сохраняя только комбинаторную структуру и определенные требования на форму. И получается, что даже, если отбросить проблемы локальности, бывают ситуации, когда лучшее решение с зафиксированной формой и лучшее решение метода колебания вершин находятся в совершенно разных местах и заданного отклонения *dx* не достаточно, чтобы метод колебания вершил нашел свое лучшее решение. Из-за этого иногда приходится запускать метод колебания вершин на различных начальных точках, чтобы достичь более хорошего результата. Поэтому для повышения эффективности алгоритма необходимо найти альтернативный подход без использования начальной точки.

5. Альтернативный подход

В связи с описанными проблемами начаты исследования по разработке алгоритма, работающего на базе НП-задачи, не нуждающегося в начальной точке. Первым этапом исследования стало написание алгоритма, который находит оптимальное расположение для одной жестко зафиксированной формы

Есть начальные координаты вершин вписываемого многогранника v_i. Они только задают форму, сам многогранник может быть любого размера и иметь любое расположение по отношению к внешнему многограннику. Конечные координаты $v1_i$ записываются в виде ограничений *g(x)* следующим образом:

$$\overline{v1_i} = \mathbf{R} * \overline{v_i} * zoom + \overline{trans}$$

Где $zoom$ – это произвольный коэффициент увеличения, $\overline{trans}$ – это произвольный вектор трансляции, **R** – произвольная матрица поворота, заданная через кватернионы.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1-2q_j^2-2q_k^2 & 2(q_iq_j-q_kq_r) & 2(q_iq_k+q_jq_r) \\ 2(q_iq_j+q_kq_r) & 1-2q_i^2-2q_k^2 & 2(q_jq_k-q_iq_r) \\ 2(q_iq_k-q_jq_r) & 2(q_jq_k+q_iq_r) & 1-2q_i^2-2q_j^2 \end{bmatrix}$$

Кроме этих уравнений необходимо задать, что сумма квадратов кватернионов равна единицы.

Таким образом, мы задаем, что данная форма может подвергаться повороту, увеличению и трансляции и занимать любое расположение в пространстве. Также необходимо задать ограничения на нахождение внутреннего многогранника внутри внешнего. Целевой функцией является объем, выраженный через переменные $v1_i$, аналогично методу колебания вершин.

Этот алгоритм дает объем в среднем на 0.4% больше, чем исследуемые алгоритмы, работающие с одной фиксированной формой. То есть методы численной оптимизации являются более надежными для получения начальной точки для метода колебания вершин. Но алгоритм работает в среднем 41 секунду, что является слишком большим временем для прикладных целей.

В дальнейшем планируется протестировать другие способы задания преобразования пространства, например, использовать матрицу поворота, выраженную через углы Эйлера или через базисные вектора. Также планируется настроить солвер Ipopt специально под конкретную задачу, это может дать существенное ускорение в несколько раз. Если получится улучшить алгоритм, работающий с одной формой, до необходимых рабочих характеристик, то будут проведены работы по скрещиванию его с методов колебания вершин.

6. Заключение

В статье рассмотрена цепочка алгоритмов вписывания одного многогранника в другой, которая используется в реальных прикладных задачах. Кратко описаны основные принципы, по которым работают эти алгоритмы. И приведены возникающие проблемы, которые требуют объединения алгоритмов в единый более сложный алгоритм. Рассмотрены первые шаги исследований в этом направлении, приведены их результаты и дальнейшие планы работы.

Литература

Емеличев В.А., Ковалев М.М, Кравцов М.К., Многогранники, графы, оптимизация, - Москва "Наука", 1981

V.A. Emelichev, M.M.Kovalev, M.K. Kravtsov, Mnogogranniki, grafy, optimizatsiya, - Moskva "Nauka", 1981 (in Russian)

Fourer R., Gay D., and Kernighan B., AMPL: A Modeling Language For Mathematical

Programming, - Duxbury Press/Brooks/Cole Publishing Company, 2003

Hales T., The status of the Kepler conjecture, Mathematical Intelligencer 16(1994), C. 47-58.

Kawajir Y., Laird C., Wächter A., Introduction to Ipopt: A tutorial for downloading, installing, and using Ipopt, 2010, URL: http://www.coin-or.org/Ipopt/documentation/

Кокорев Д.С. , Алгоритм поиска выпуклого многогранника максимального объема, вписанного в другой многогранник, - журнал «Информационные технологии и вычислительные системы», - номер 2013/03, С. 27-31.

D.S. Kokorev, Algoritm poiska vypuklogo mnogogrannika maksimal'nogo ob"ema, vpisannogo v drugoy mnogogrannik, - zhurnal «Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy», - nomer 2013/03, S. 27-31. (in Russian)

Кокорев Д.С., Оптимизационный алгоритм поиска вписанного многогранника максимального объема, - журнал «Программные продукты и системы», - номер 2016/01, Стр. 90-95.

D.S. Kokorev, An Optimization algorithm to find inscribed polyhedron of maximum volume,- magazine Programmnye produkty i sistemy №1, 2016, pp 90-95 (in Russian)

Мусин О.Р., Проблема двадцати пяти сфер, Успехи математических наук, 2003, Т.58, №4(352), стр. 153-154

O.R.Musin, Problema dvadtsati pyati sfer, Uspekhi matematicheskikh nauk, 2003, T.58, №4(352), str. 153-154 (in Russian)

Tarasov A., Musin O., The strong thirteen spheres problem,- Topology, Geometry, and

Dynamics: Rokhlin Memorial January 11-16, 2010. Saint Petersburg, Russia

Валиахметова Ю.И., Филиппова А. С., Теория оптимального использования ресурсов Л. В. Канторовича в задачах раскроя-упаковки: обзор и история развития методов решения, Вестник УГАТУ, Том 18, №1(62).

Yu. I. Valiakhmetova, A. S. Filippova, Teoriya optimal'nogo ispol'zovaniya resursov L. V. Kantorovicha v zadachakh raskroya-upakovki: obzor i istoriya razvitiya metodov resheniya, Vestnik UGATU, Tom 18, №1(62). (in Russian)

Applied problems of polyhedron inscribing task solving

D. S. Kokorev

Federal state-financed Institution Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences(Kharkevich Institute)
Bolshoy Karetny per. 19, build.1, Moscow 127051 Russia

E-mail: korvin-d@yandex.ru

The article discusses problem of finding the polyhedrons given shape inside another polyhedrons. This problem is a particular case of the 18th Hilbert problem third part. It has a practical application in the computer simulation of three-dimensional objects, the cutting-stock problems solution**,** the autonomous robots moving, and the jewelry industry. It is proposed method for finding the inscribed polyhedrons, based on the reduction of the problem to a nonlinear programming problem, in the article. It describes the basic functional limitations that are used for this task, and program resources to work effectively with the nonlinear programming problems. Described method requires a good initial solution. Solutions of other less accurate algorithms can be taken as a starting point. One of the most common algorithm with such goal is a homothetic bloating of object under different angles and with a center of mass in different points until an intersection with an external polyhedron. A separate chapter is devoted to the description and disadvantages of these methods. The main disadvantage is a locality of decision. As well as the need for iterating of rigidly defined forms of a polyhedron. This methods analogue, based on the nonlinear programming problem, is offered. The proposed method is based on representing any possible movement as composition of a rotation, a translation, and a dilation. Rotation matrix represented by quaternions in the described experiment. Invented algorithm works better than the existing analogs, but it is still insufficient fast for practical purposes. Future development plans are written in the conclusion.

Keywords: Computer modelling, convex polyhedrons, combinatorial structure, inscribed polyhedron, nonlinear programming problems, solver

The work was supported by Russian Science Foundation (№16-11-10352).