Методы эйлеровой аппроксимации графов в задаче мониторинга коммуникаций

А. М. Раппопорт

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук
127051, г. Москва, Большой Каретный пер. д.19, стр.2

E-mail: ram43@mail.ru

Работа посвящена решению задачи организации эффективного мониторинга коммуникационных систем на основе минимизации повторного обхода соединений. Одна из возможностей для его реализации состоит в построении ближайшей структуры, в которой такие повторы исключены, а именно эйлерова графа. Проведена классификация вершин исходного графа относительно наличия ребер между подмножествами вершин с четными и нечетными степенями. Рассмотрены различные способы построения аппроксимирующего графа, в первую очередь минимизирующие изменения в матрице смежности. Предложен эффективный метод преобразования исходного графа в эйлеров (полуэйлеров) с использованием операций добавления и удаления ребер. Сформулированы условия возможности внутренней аппроксимации, когда в результате последовательной процедуры удаления ребер получается эйлеров (полуэйреров) граф.

Ключевые слова: оптимизация мониторинга коммуникаций, преобразование графа, реберные операции, эйлеров граф.

Финансовая поддержка: Грант Российского Фонда Фундаментальных Исследований № 16-07-00238А.

Введение

При проведении мониторинга коммуникационных систем естественно пытаться исключить повторное прохождений соединений. Как известно, такая возможность является уникальной, т.к. означает эйлеровость соответствующего графа, что равносильно четности степеней всех его вершин. Поэтому в общем случае оказывается целесообразным создание метода обхода, в котором дублирование коммуникаций удается снизить. Один из таких подходов представлен алгоритмом решения задачи о китайском почтальоне [Фляйшнер, 2002; Fleischner, 1991; Кристофидес, 1978], минимизирующим такие повторы. Случай, когда учитывается только наличие соединений (без весов), рассмотрен в работе [Bellman, Cooke, 1969]. Другой подход состоит в построении ближайшего аппроксимирующего эйлерова графа, чему и посвящена настоящая статья. В ней излагаются некоторые способы решения этой задачи, использующие операции добавления и удаления ребер в исходном графе. Предлагаются два эффективных метода, отличающихся последовательностью применяемых операций.

Постановка задачи и известные методы преобразования графов в эйлеров

Пусть $G(V,E)$ – конечный связный граф, V - множество вершин, E – множество ребер ($|V|=n, |E|=m$). Множество V представимо в виде $V=V_1 \cup V_2, |V_1|=n_1, |V_2|=n_2$, где $V_1(V_2)$ - подмножество вершин с нечетными (четными) степенями. Обозначим $G_1=G_1(V_1,E_1)$, $G_2=G_2(V_2,E_2)$ - подграфы на соответствующих подмножествах вершин. В общем случае, как известно, n_1 - четное число, а в эйлеровом графе $n_1=0$. Ищется эйлеров (полуэйлеров) граф $G'=G'(V',E')$, минимизирующий хеммингово расстояние от исходного графа, т.е.

$$\rho(G,G')=|E\Delta E'| \to \min .$$

Простейший, но не эффективный способ получения эйлерова графа из исходного, состоит во введении новой вершины, смежной со всеми вершинами из V_1, что требует использования n_1 новых ребер. (Далее будем считать $V'=V$.)

Также, если допускаются кратные ребра, то при добавлении $n_1/2$ попарно несмежных ребер получим эйлеров граф.

В работе [Раппопорт, 2011] выделен ряд случаев, исключающих введение новой вершины и позволяющих использовать меньшее число дополнительных ребер. В частности, в классах двудольных графов с четными долями или неполных двудольных графов с нечетными долями при добавлении минимального количества ребер, равного $n_1/2$, получается эйлеров граф.

В статье [Раппопорт, 2012] решается задача построения внешнего аппроксимирующего графа, отличающегося от исходного новыми ребрами. Для этого предложена последовательная процедура единичного увеличения степеней «нечетных вершин», которая за $n_1/2$ операций добавления ребер (без кратностей) преобразует исходный граф в эйлеров, если в результате остается пустой граф. Эта процедура основа на так называемом многодольном представлении конечного графа, хотя для получения аналогичного результата можно было бы обойтись и более простыми средствами (см. раздел 3). Получены условия, которым должен удовлетворять подграф на вершинах с нечетными степенями, гарантирующие минимальность числа используемых операций в независимости от выбора такого представления.

Следует отметить, что введение новых ребер не всегда означает в практической ситуации построение новых коммуникаций. Например, когда стоит задача мониторинга подсистемы коммуникаций, включенной в некоторую объемлющую структуру и добавление новых соединений происходит за счет имеющихся в ней.

Два эффективных метода построения эйлерова графа

Как и ранее, представим исходный граф $G(V,E) = G(V_1,V_2,E)$ в виде двух подграфов $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$, $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, где E_3 - подмножество ребер, соединяющих вершины из V_1 и V_2. Вершины из V_1 можно разбить на две группы: $V_{12} = \{x \in V_1 /(x,y) \notin E_1, y \in V_1\}$, $V_{11} = \{x \in V_1 / \exists y \in V_1, (x,y) \in E_1\}$, первые смежны только с «четными вершинами», вторые соединены ребром с некоторой «нечетной вершиной».

Построение эйлерова графа с начальной операцией добавления ребер

Пусть в подграфе с «нечетными вершинами» G_1 отсутствуют несмежные, т.е. $G_1 = K_{n_1}$ - полный граф и в нем имеется простой цикл длины n_1. Если кратные ребра допускаются, то $n_1 / 2$ новых ребер делает степени всех его вершин четными. Если кратные ребра запрещены, то добавление новых невозможно и эйлеров граф будет получен при удалении $n_1 / 2$ попарно несмежных ребер в том же простом цикле. В случае, когда $G_1 = K_2$ содержит единственное ребро, его можно удалить только, если оно не является мостом в исходном графе G. В противном случае граф G полуэйлеров, т.е. содержит эйлерову цепь.

Пусть теперь вершины $x, y \in V_1$ несмежные. Добавление ребра (x,y) делает степени x, y четными, а число «нечетных» вершин в новом графе уменьшается на две. Продолжая эту процедуру, в результате придем к случаю, рассмотренному выше; либо, если $E_1 = \varnothing$, за $n_1 / 2$ получим эйлеров граф. Эти рассуждения позволяют сформулировать

Утверждение 1. Пусть начальной операцией преобразования графа $G = G(V,E)$ является добавление ребер без кратности, тогда

а) если в подграфе G_1 с «нечетными» вершинами нет моста графа G, то за $n_1 / 2$ шагов добавления и удаления ребер получается эйлеров граф:

б) если в подграфе G_1 есть мост графа G, то за $n_1 / 2$ шагов добавления и удаления ребер получается полуэйлеров граф.

Построение эйлерова графа с начальной операцией удаления ребер

Более предпочтительной представляется ситуация, когда исходной оказывается операция удаления некоторых соединений, не требующая в первую очередь добавления новых. Такая возможность возникает, когда достаточно ограничиться мониторингом некоторой заданной подсистемы коммуникаций.

Пусть подграф $G_1(V_1,E_1)$ не является деревом, каждое ребро которого - мост в исходном графе G. Последовательно удаляем все ребра из E_1. На каждом шаге степени двух «нечетных вершин» становятся четными. При этом возникают две возможности. Первая - все степени вершин станут четными и эйлеров граф будет получен без использования новых ребер. Вторая – подграф на оставшихся «нечетных вершинах» не имеет ребер. Он содержит четное число вершин и преобразуется в граф с четными степенями добавлением, как и ранее в п.3.1., попарно несмежных ребер. В результате за $n_1 / 2$ шагов будет построен эйлеров граф. Если в подграфе

G_1 имеется единственное ребро, являющееся мостом графа G, то в полученном в результате предложенной процедуры графе имеется эйлерова цепь. Если же подграф G_1 - дерево, содержащее более одного моста графа G, то приоритетной операцией перестройки будет добавление ребер.

Утверждение 2. Пусть начальной операцией преобразования графа $G = G(V, E)$ является удаление ребер возможно с последующим добавлением новых (без кратностей), тогда

а) если в подграфе G_1 с «нечетными вершинами» нет моста графа G, то за $n_1 / 2$ шагов удаления и добавления ребер получается эйлеров граф; при этом, если в результате удаления ребер не осталось «нечетных вершин», то новых ребер не требуется;

б) если в подграфе G_1 имеется единственное ребро, являющееся мостом в G, то за $n_1 / 2$ шагов удаления и добавления ребер получается полуэйлеров граф.

Таким образом, операции удаления и добавления $n_1 / 2$ ребер из подграфа с «нечетными» вершинами всегда позволяет преобразовать исходный граф в эйлеров или полуэйлеров. Если имеется необходимость учета весов соединений (например, расстояний между узлами сети), то в описанной процедуре сначала последовательно удаляются ребра с минимальными весами, а затем последовательно добавляются ребра с максимальными весами. В результате будет построена ближайшая подсистема коммуникаций, при мониторинге которой повторные прохождения соединений исключаются.

Список литературы

Belman R., Cooke K. The Kenisberg bridges problem generalized // J. of Math. And Appl. — 1969. — P. 25.

Фляйшнер Г. Эйлеровы графы и смежные вопросы. — М.: «Мир». 2002. — 335 с.

Fleiscnter H. Eurelian graphs and related topics. Part 1, vol. 1. Amsterdam: Elsevier science publishers B. V., 1991 (Russ. ed.: Fleischner H. Eulerovy grafy i smezhnye voprosy // M., «Mir»: 2002).

Fleischner H. Eurelian graphs and related topics. Part 1, vol. 2. Amsterdam: Elsevier science publishers B. V., 1991. — 337 p.

Кристофидес Н. Теория графов (алгоритмический подход). — М.: «Мир». 1978. — 432 с.

Christofides N. Graph theory, an algorithmic approach // Academic Press, New York, London, San Francisco, 1975 (Russ. ed.: Christofides N. Teoria grafov, algoritmicheskiy podhod // M., «Mir»: 1978).

Раппопорт А.М. Оптимизация мониторинга системы коммуникаций на основе эйлеровой аппроксимации // Системный анализ и информационные технологии, САИТ-2011: Труды IV Международной конференции. Т. 2. — Абзаково, Россия: 2011. — С. 173–175.

Rappoport A.M. [The monitoring optimization of communications system by means of eurelian approxsimation]. Trudy IV Mezhdunarodnoy konferencii “Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologii” [Proc. IV Int. Conf. System analyses and information technology]. — Vol. 2. — Abzakovo, Russia: 2011. — P. 173–175 (in Russian).

Раппопорт А.М. Эффективный мониторинг коммуникаций на основе внешней аппроксимации графа // Распределенные вычисления и грид − технологии в науке и образовании: Труды V Международной конференции. — Дубна: ОИЯИ, 2012. — С. 377–382.

Rappoport A.M. [The eurelian graphs approximation methods for the problem of communications monitoring]. Trudy V Mezhdunarodnoy konferencii “Raspredelennye vychesleniya i grid technologii v nauke i obrazovanii” [Proc. V Int. Conf. Distributed computing and grid technology in science and education]. — Dubna: JINR, 2012. — P. 377–382 (in Russian).

The eulerian graphs approximation methods for the problem of communications monitoring

A. M. Rappoport

A. A. Kharkevich Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, 19, b. 2, Bolshoj Karetnij by-st., Moscow, 127051, Russia

E-mail: ram43@mail.ru

The paper provides a solution efficient communication system monitoring problem because of doubling connections minimization. One of the approaches to this realization is approximation of corresponding graph by eurelian graph, that excludes repeated vertex advancing.

The work provides classification of the input graph vertexes in regard to edges between subsets between vertexes subsets with even and odd degrees. The study also considers various approximating graph construction ways, first of all those, that minimize changes in adjacent matrix. The paper suggests the efficient method for connected graph transmission to eulerian (semieurelian) graph using edges operation of deletion and adding. The work shows the conditions of existence of interior approximation without additional elements.

Keywords: graph transmission, edges operations, eulerian graph, monitoring of communications optimization.

The work was supported by Grant of RFFI № 16-07-00238A.