

Условие стабилизируемости и коррекция движения линейных систем с импульсными воздействиями и запаздыванием

Б.И. Ананьев¹
abi@imm.uran.ru

Н.И. Желонкина²
312115@mail.ru

1—Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург)

2—Уральский федеральный университет (Екатеринбург)

Аннотация

Исследуются свойства стабилизируемости решений линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и обобщённым воздействием в матрице системы, а также предлагаются импульсные методы коррекции систем без запаздывания. Получены достаточные условия, которые обеспечивают устойчивость и асимптотическую устойчивость решений системы уравнений. Для задач коррекции систем без запаздывания с целью минимизации конечного функционала указаны алгоритмы, согласно которым определяются моменты коррекции и возникает невозрастающая последовательность прогнозируемых значений функционала. Результаты применяются в задачах навигации и биофизики.

Ключевые слова: устойчивость; стабилизируемость; системы с запаздыванием; коррекция движения; импульсные управления.

1 Введение

Системы с импульсным воздействием, в настоящее время, являются современным направлением при изучении теории дифференциальных уравнений, имеющей применение в различных областях знаний. Они являются приложением к задачам математического моделирования в технике, электрофизике, биологии [1,2,16], экономике [4]. Кроме того, такие процессы могут сопровождаться запаздыванием, обусловленным различными причинами. Например, такой процесс можно наблюдать в системах с автоматическим регулированием, когда необходимо учитывать время реакции системы на управляющие процессы, время прохождения сигнала. Для таких систем важным вопросом становится проблема стабилизируемости решения. Данная работа исследует устойчивость и асимптотическую устойчивость для такого рода систем, т.е. систем с импульсным воздействием в матрице системы и запаздыванием. Будем рассматривать ситуацию, когда однородная система без импульсов является неустойчивой, а устойчивость и асимптотическая устойчивость достигается за счёт импульсного воздействия. Подход в данной работе основан на [1], но там рассматривается система без запаздывания, а мы усложняем исходную систему, вводя запаздывание. Заметим, что в работах [5,6], импульсное воздействие играло роль возмущения, а асимптотическая устойчивость достигалась

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at <http://ceur-ws.org>

за счёт асимптотической устойчивости линейной однородной системы без импульсов. Главной особенностью рассматриваемой системы является наличие некорректной операции умножения разрывной функции на δ -функцию, которая получается за счёт обобщённого дифференцирования ступенчатой функции, а это приводит к возникновению импульса и разрыву траектории. Под решением, так же как и в [1, 5, 7], понимается поточечный предел последовательности гладких решений, порождённых гладкой аппроксимацией обобщённого воздействия, если этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.

Рассматриваются также импульсные управляемые системы, описывающие в линейном приближении отклонение фазового вектора от номинальной траектории. Такие системы часто возникают в задачах управления летательными объектами, [8]. Общие методы решения задач управления с неполной информацией предложены, например, в [9–11]. Тем не менее, специальные ограничения на возмущения и подходящая формулировка задачи дают возможность получить более продвинутые результаты. Используются методы управления в условиях неопределённости, а также информационные и совместимые множества, [11–13]. Задачи управления наблюдениями рассматривались в [14]. В данной работе расширяются и дополняются результаты [15] в случае импульсных управлений. Другие задачи коррекции движения исследовались в [17, 18].

2 Задача стабилизации

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с запаздыванием, следующего вида:

$$\dot{x}(t) = \left(A + \sum_{j=1}^m D_j(t) \dot{v}_j(t) \right) x(t) + A_\tau x(t - \tau), \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t).$$

где A, A_τ – постоянные $n \times n$ матрицы, $D_j(t)$ ($j \in \overline{1, m}$) – непрерывные ограниченные взаимно коммутативные матрицы-функции размерности $n \times n$, v_i – компоненты вектор функции $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t))^T$, $\varphi(t)$ – начальная функция, которая является функцией ограниченной вариации, определённой на $[t_0 - \tau, t_0]$. Будем предполагать, что $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t))^T$ – кусочно-постоянные функции, имеющие разрывы в точках $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ и эта последовательность не имеет точек сгущения. Функции $v_i(t)$ в точках разрыва будем считать непрерывными слева. При сделанных выше предположениях систему (1) можно записать в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + \sum_{j=1}^m D_j(t) \cdot x(t) \cdot \Delta v_j(t_i) \cdot \delta(t - t_i), \quad (2)$$

где $\Delta v_j(t_i) = v_j(t_i + 0) - v_j(t_i)$ – скачки кусочно-постоянных функций $v_j(t)$, $\delta(t - t_i)$ – δ -функция Дирака [1], сосредоточенная в момент времени t_i . Решение уравнения (2), согласно [1, 2, 7], будут удовлетворять следующему интегральному уравнению

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t Ax(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t A_\tau x(\xi - \tau) d\xi + \sum_{t_i < t} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)),$$

а функции скачков определяются следующими уравнениями

$$S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)) = z(1) - z(0), \quad (3)$$

$$\dot{z}(\xi) = \sum_{j=1}^m D_j(t_i) z(\xi) \Delta v_j(t), \quad z(0) = x. \quad (4)$$

Таки образом, величина скачка траектории в момент импульсного воздействия, согласно (3), определяется с помощью решения вспомогательного уравнения (4).

2.1 Структура решения системы

Будем рассматривать ситуацию, когда система (1) без импульсных воздействий является неустойчивой, а свойство устойчивости будет обеспечиваться импульсными составляющими, входящими в систему (1). На промежутке $[t_0, t_1]$ в силу структуры управляющего воздействия, решение системы (1) совпадает с решением уравнения:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau), \quad x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \quad (5)$$

Сделаем следующее предположение, пусть справедлива оценка

$$\|Y(t, -s)\| \leq ce^{\alpha(t-s)} (\alpha > 0, c \geq 1),$$

где $Y(t, -s)$ – фундаментальная матрица системы (5). Далее переходим к вычислению скачка $S(t_1, x(t_1), \Delta v(t_1))$ с помощью дифференциального уравнения (4), где значение $z(1)$ даёт начальное условие для движения системы (1) на следующем промежутке $(t_1, t_2]$, которое строится с помощью решения уравнения (5) с начальным условием $x(t_1) + S(t_1, x(t_1), \Delta v(t_1))$.

Поставим в соответствие разрывной траектории $x(t)$ непрерывную траекторию $x^*(t)$, которая будет определяться решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}^*(s) = Ax^*(s) + A_\tau x^*(s - \tau),$$

на промежутке $(t_i + i, t_{i+1} + i]$, а на промежутке $(t_i + i - 1, t_i + i]$ как решение дифференциального уравнения (4). Пусть справедливо следующее неравенство:

$$\|\tilde{D}_i(s)\| \leq be^{\lambda_i s} (b \geq 1, \lambda_i < 0), \quad (6)$$

здесь $\tilde{D}_i(s)$ – нормированная фундаментальная матрица системы (4).

В результате получили систему с переменной структурой $(\Delta \omega_{i-s})$ [19], решением которой является непрерывная вектор-функция $x^*(s)$. В результате, исходной задаче поставлена в соответствие система с переключениями, где в зависимости от интервала активируется соответствующая подсистема. Наглядно это демонстрирует следующий рисунок.

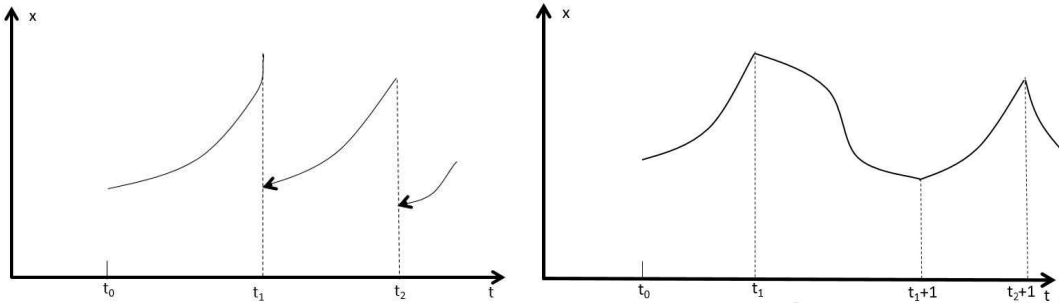


Рис. 1: Слева изображена траектория с разрывами, справа – непрерывная траектория $x^*(s)$

2.2 Условия стабилизируемости

Предположим, что $x(t)$ – аппроксимируемое решение уравнения (1), порожаемое начальной функцией $\varphi(t)$, которая задаётся на $[t_0 - \tau, t_0]$. Тогда согласно формуле Коши из [20], получим:

$$x(t) = Y(t, -t_0) \cdot \varphi(t_0) + \int_{-\tau}^0 Y(t, -t_0 - \tau - s) A_\tau \varphi(s) ds.$$

До точки разрыва аппроксимируемое решение будет определяться следующим уравнением:

$$x(t) = Y(t, -t_0) \cdot \varphi(t_0) + \int_{-\tau}^0 Y(t, -t_0 - \tau - s) A_\tau \cdot \varphi(s) ds + \sum_{t_i < t} Y(t, t_i) \cdot S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i)).$$

Вычисляя норму левой и правой части, получим:

$$\|x(t)\| \leq ce^{t_{i+1}-t_i}(1 + \|A_\tau\|) \max_{[t_0-\tau, t_0]} \|\varphi(\cdot)\|. \quad (7)$$

Далее переходим на следующий промежуток $[t_1, t_1 + 1]$, на котором активируется вторая подсистема. Тогда с учётом (6) и (7) получим справедливое выражение для оценки склеенной траектории

$$\|x^*(t_1 + 1)\| \leq be^{\lambda_1} \|x^*(t_1)\| \leq cbe^{\lambda_1 + \alpha(t_1 - t_0)}(1 + \|A_\tau\|) \max_{[t_0-\tau, t_0]} \|\varphi(\cdot)\|.$$

Далее, по индукции можно показать, что для произвольного отрезка $[t_i + i, t_{i+1} + i]$ справедливо неравенство

$$\|x^*(t_i + 1)\| \leq \exp(i \ln c + i \ln b + \sum_{k=1}^i \lambda_k + \alpha(t_i - t_0) + i \ln(1 + \|A_\tau\|)) \max_{[t_0-\tau, t_0]} \|\varphi(\cdot)\|. \quad (8)$$

Если степень экспоненты в (8) есть величина ограниченная, то решение системы (1) будет устойчивым, а если степень экспоненты (8) стремится к $-\infty$ при $t \rightarrow \infty$, то получаем асимптотическую устойчивость.

3 Задачи коррекции

Будем рассматривать n -векторную линейную систему вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t) + C(t)v(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

с известными непрерывными коэффициентами. Наблюдается m -векторный сигнал

$$y(t) = G(t)x(t) + w(t), \quad (10)$$

с непрерывной матрицей $G(t)$. Неизвестные функции $v(t)$, $w(t)$ и начальное состояние x_0 стеснены ограничениями

$$|x_0|_{P_0}^2 + \int_0^T (|v(t)|_{Q(t)}^2 + |w(t)|_{R(t)}^2) dt \leq 1, \quad (11)$$

где символ $|x|_P^2$ равен $x'Px$, штрих ' означает транспонирование, P_0 , $Q(t)$, $R(t)$ – симметричные, положительно определённые и непрерывные матрицы, имеющие подходящую размерность. Допускается вырождение матрицы P_0 . Если она нулевая, информация о начальном состоянии полностью отсутствует. В этом случае считается выполненным

Предположение 1. Система (9), (10) при $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, $w \equiv 0$ полностью наблюдаема [9, 21] на любом подинтервале $[s, \tau] \subset [0, T]$.

Используются управления вида $u(t) = dU(t)/dt$, где $U(t)$ – вектор-функция ограниченной вариации, подчинённая неравенству

$$\int_0^T |dU(t)| \leq \mu, \quad \mu > 0. \quad (12)$$

Здесь и далее $|\cdot|$ – евклидова норма и $\int_a^b |dU(t)| = \text{var}_{[a,b]} U$ – полная вариация функции U .

Цель управления – минимизировать терминальный функционал $|Dx(T)|$, где $D \in \mathbb{R}^{d \times n}$ – заданная матрица. Выбор неопределённых параметров $\{x_0, v(\cdot), w(\cdot)\}$ может мешать минимизации.

3.1 Информационные и совместимые множества

Изложим кратко теорию оценивания в нашем случае. В случае невырожденной матрицы P_0 информационное множество $\mathbf{X}(t, y, u) \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из всех векторов $x = x(t)$, которые могут реализоваться в системе (9), (10), (11), описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t, y, u) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x - \hat{x}(t)|_{P(t)}^2 + h(t) \leq 1 \right\}, \quad \hat{x}(0) = 0, \quad h(0) = 0, \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + P^{-1}(t)G'(t)R(t)(y(t) - G(t)\hat{x}(t)), \quad \dot{h}(t) = |y(t) - G(t)\hat{x}(t)|_{R(t)}^2, \\ \dot{P}(t) &= G'(t)R(t)G(t) - P(t)C(t)Q^{-1}(t)C'(t)P(t) - A'(t)P(t) - P(t)A(t), \quad P(0) = P_0. \end{aligned} \quad (13)$$

При вырожденной матрице P_0 используются уравнения [15, формулы (8),(9)]. Далее рассматриваем только невырожденный случай. Введём функции

$$f(t) = y(t) - G(t)\hat{x}(t), \quad t \in [0, T], \quad V(t, x) = |x - \hat{x}(t)|_{P(t)}^2 + h(t).$$

Использование обновляющей функции $f(t)$ и сигнала $y(t)$ (за вычетом слагаемого с управлением) абсолютно эквивалентно согласно (13). Функция $V(t, x)$ имеет смысл минимума критерия типа (11) на $[0, t]$ при краевом условии $x = x(t)$ и заданном сигнале и управлении. Используются далее и совместимые множества $\mathbf{V}(t, y, u) \subset \mathbb{R}^n \times L_2^q[t, T] \times L_2^m[t, T]$, состоящие из троек $\{(x(t), v_t(\cdot), w_t(\cdot))\}$, для которых существуют функции $(v(\cdot), w(\cdot))$, удовлетворяющие (11) и такие, что выход (10) на $[0, t]$ с условием $x = x(t)$ совпадает почти всюду с заданным сигналом $y^t(\cdot)$. Здесь и далее $v_t(\cdot)$ – сужение функции $v(\cdot)$ на $[t, T]$, а $y^t(\cdot)$ – сужение функции $y(\cdot)$ на $[0, t]$. Совместимое множество описывается формулой

$$\mathbf{V}(t, y, u) = \left\{ (x, v_t, w_t) : V(t, x) + \int_t^T (|v_t(s)|_{Q(s)}^2 + |w_t(s)|_{R(s)}^2) ds \leq 1 \right\}. \quad (14)$$

Соотношение между совместимым и информационным множеством даётся равенством $\mathbf{X}(t, y, u) = \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \mathbf{V}(t, y, u)$. Подробнее см. [15, Лемма 2, ф-ла (13)].

3.2 Коррекция с предписанными моментами изменения управления

Пусть $\lambda : 0 < t_1 < \dots < t_{N+1} = T$ – разбиение на $[0, T]$. Моменты t_i называются *моментами коррекции управления*. Введём ресурс $\mu(t) = \mu - \int_0^t |dU(s)|$ управления и рассмотрим тройку $p(t) = (\hat{x}(t), h(t), \mu(t))$ как *позицию системы в момент t* . Заметим, что совместимое множество $\mathbf{V}(t, y, u)$ зависит только от пары $(\hat{x}(t), h(t))$. Переход между двумя смежными позициями $p_i = (\hat{x}(t_i), h(t_i), \mu(t_i))$ и $p_{i+1} = (\hat{x}(t_{i+1}), h(t_{i+1}), \mu(t_{i+1}))$ зависит от управления $u_i(t) = dU_i(t)/dt$ и обновляющей функции $f_i(t)$ на $[t_i, t_{i+1}]$. Функция ограниченной вариации может иметь скачок в момент t_i . В этом случае мы различаем скачок слева на $[t_i-, t_i]$ и справа на $[t_i, t_{i+}]$. Введём множества $\mathcal{U}_i(\nu) = \{U(\cdot) : \int_{t_i}^{t_{i+1}} |dU(t)| \leq \nu\}$, где $\nu \leq \mu$, $i \in 1 : N$. Пусть символ $\mathbf{X}_T(u_i | \mathbf{V}(t, y, u))$ означает множество достижимости системы (9) из совместимого множества $V(t, y, u)$, где $w_t = 0$. Это множество состоит из векторов $x(T)$ при переборе в (14) совокупности $\mathbf{V}(t, y, u)$ с $w_t = 0$.

Задача 1. Найти функции $U_i^*(t)$ ограниченной вариации ($u_i^*(t) = dU_i^*(t)/dt$) на интервалах $[t_i, t_{i+1}]$ и неотрицательные числа ν_i , $i \in 1 : N$, дающие величину

$$J^* = \min_{\nu_{1:N}} \min_{U_1 \in \mathcal{U}_1(\nu_1)} \max_{f_1(\cdot)} \dots \min_{U_N \in \mathcal{U}_N(\nu_N)} \max_{f_N(\cdot)} \max_{x \in \mathbf{X}_T(u_N | \mathbf{V}(t_N, y, u))} |Dx|, \quad (15)$$

где $\sum_{i=1}^N \nu_i \leq \mu$, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f_i(s)|_{R(s)}^2 ds \leq 1 - h_i$, для всех $i \in 1 : N$. Полагаем $U(t) \equiv 0$ на $[0, t_1]$.

Замечание 1. Так как (9), (10) линейны, мы имеем $\mathbf{X}(t, y, u) = z(t) + \mathbf{X}(t, \tilde{y}, 0)$, где $\tilde{y}(t) = y(t) - G(t)z(t)$ и

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), \quad z(0) = 0. \quad (16)$$

Аналогично, имеем $\mathbf{V}(t, y, u) = (z(t), 0, 0) + \mathbf{V}(t, \tilde{y}, 0)$. С этого момента пишем множества с $\tilde{y}(\cdot)$ и $u(\cdot) = 0$ как $\mathbf{X}(t, \tilde{y})$ и $\mathbf{V}(t, \tilde{y})$, соответственно. Поэтому $\mathbf{X}_T(u_t | \mathbf{V}(t, y, u)) = z(T) + \mathbf{X}_T(0 | \mathbf{V}(t, \tilde{y}))$ и величина (15) может быть записана как

$$J^* = \min_{\nu_{1:N}} \inf_{U_1 \in \mathcal{U}_1(\nu_1)} \max_{f_1(\cdot)} \dots \min_{U_N \in \mathcal{U}_N(\nu_N)} \max_{f_N(\cdot)} \max_{x \in \mathbf{X}_T(0 | \mathbf{V}(t_N, \tilde{y}))} |D(z(T) + x)|$$

с теми же ограничениями, как и в (15).

Задача 2. В любой предписанный момент t_i , $i \in 1 : N$ следует найти управление $u_i^{T*}(\cdot)$, которое даёт решение задачи:

$$\max_{f_i(\cdot)} \max_{x \in \mathbf{X}_T(u_i | \mathbf{V}(t_i, y, u))} |Dx| \rightarrow \min_{U_i} = j_i(p), \quad (17)$$

при ограничениях $\int_{t_i}^T |f_i(s)|_{R(s)}^2 ds \leq 1 - h(t_i)$, $\int_{t_i}^T |dU_i(s)| \leq \mu(t_i)$, и далее совершить одношаговый прогноз

$$J_i(p, u_i^*) = \max_{f_i(\cdot)} j_{i+1}(p), \quad (18)$$

где $\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f_i(s)|_{R(s)}^2 ds \leq 1 - h(t_i)$ и $u_i^*(s) = dU_i^{T*}(s)/ds$ на интервале $[t_i, t_{i+1}]$. Если $J_i(p, u_i^*) < j_i(p)$, сохраняем управление u_i^{T*} на $[t_i, t_{i+1}]$. Иначе переходим к управлению u_i^{i+1*} , минимизирующему величину (18) при ограничении $\int_{t_i}^{t_{i+1}} |dU(t)| \leq \mu(t_i)$. Управление может быть не единственным. Если так, выбираем любой минимизатор. В примерах имеет смысл принять специальное решение. В этой задаче $\mu(t_1) = \mu$, как и выше.

3.3 Коррекция с синтезом моментов коррекции

В любой момент t с позицией $p(t)$ определяем величину $j_t(p)$ по формуле (17), где t_i заменяется на t . После этого делаем прогноз на интервал $[t, \tau]$ подобно (18):

$$J_t(p, \tau, u^*) = \max_{f_i(\cdot)} j_\tau(p), \quad (19)$$

где $\int_t^\tau |f_t(s)|_{R(s)}^2 ds \leq 1 - h(t)$ и $u^*(s) = dU_t^{T*}(s)/ds$ на интервале $[t, \tau]$. Введём величину

$$J_*(t, p, u^*) = \inf_{\tau \in [t, T]} J_t(p, \tau, u^*), \quad (20)$$

которая определяет минимум худшего прогноза (19). Процедура начинается с $t_1 > 0$ с $\mu(t_1) = \mu$. Тогда если

$$J_*(t, p, u^*) < j_t(p)$$

для всех t близких к t_1 и таких что $t > t_1$, мы продолжаем использовать $u_{t_1}^*$ до первого момента $t = t_2 > t_1$, когда

$$J_*(t, p, u^*) = j_t(p).$$

В момент t_2 программное минимаксное управление модифицируется, и мы переходим к оптимальному управлению $u_{t_2}^{T*}(\cdot)$, дающему решение задачи подобно (17). Процедура повторяется на $[t_2, T]$. Поэтому приходим к последовательности моментов коррекции $\{t_k\}$, $t_1 < t_2 < \dots \leq T$. Как увидим ниже, все минимумы и максимумы в формулах (15) – (20) достигаются.

4 Минимаксные решения задач коррекции

Рассмотрим задачи в подсекции 3.2. Для краткости обозначим $\hat{x}(t_i) = \hat{x}_i$, $h(t_i) = h_i$, и $\mu(t_i) = \mu_i$, $p(t_i) = p_i$. Введём функцию будущих потерь

$$W_i(p, \nu_{i:N}) = \min_{U_i \in \mathcal{U}_i(\nu_i)} \max_{f_i(\cdot)} \dots \min_{U_N \in \mathcal{U}_N(\nu_N)} \max_{f_N(\cdot)} \max_{x \in \mathbf{X}_T(u_N | \mathbf{V}(t_N, y, u))} |Dx|,$$

где $\sum_{j=i}^N \nu_j \leq \mu_i$, $\int_{t_j}^{t_{j+1}} |f_j(s)|_{R(s)}^2 ds \leq 1 - h_j$, для всех $j \in i : N$. Через $W_i(p)$ обозначим величину $\min_{\nu_{i:N}} W_i(p, \nu_{i:N})$. Нетрудно заметить, что $J^* = W_1(p)$ в (15) и функции $W_i(p, \nu_{i:N})$, $W_i(p)$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$W_i(p, \nu_{i:N}) = \min_{U_i \in \mathcal{U}_i(\nu_i)} \max_{f_i(\cdot)} W_{i+1}(p, \nu_{i+1:N}), \quad W_i(p) = \min_{U_i(\cdot)} \max_{f_i(\cdot)} W_{i+1}(p), \quad (21)$$

где $\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f_i(s)|_{R(s)}^2 ds \leq 1 - h_i$, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} |dU_i(t)| \leq \mu_i$, $i \in 1 : N$. Соотношения (21) имеют граничное условие

$$W_{N+1}(p) = \max_{x: |x - \hat{x}(T)|_{P(T)}^2 \leq 1 - h(T)} |Dx| = \max_{|l| \leq 1} \left\{ l' D \hat{x}(T) + (1 - h(T))^{1/2} |D'l|_{P^{-1}(T)} \right\}.$$

На последнем шаге соотношений (21), когда $i = N$, используя граничное условие, получаем

$$W_N(p, \nu_N) = \max_{|l| \leq 1} \left\{ r(l; t_N) \hat{x}_N - \max_{s \in [t_N, T]} |r(l; s) B(s)| \nu_N + \left((1 - h_N) \left(\lambda(t_N) (1 - |l|^2) + |D'l|_{P(T, t_N)}^2 \right) \right)^{1/2} \right\},$$

$$W_N(p) = W_N(p, \mu_N),$$

где используем обозначения

$$r(l; s) = l'DX(T, s), \quad \partial P(t, s)/\partial t = A(t)P(t, s) + P(t, s)A'(t) + C(t)Q^{-1}(t)C'(t),$$

$$P(s, s) = P^{-1}(s), \quad \lambda(s) = \max_{|l| \leq 1} |D'l|_{P(T, s)}^2.$$

Формула для $W_N(p, \nu_N)$ получена с использованием элементарного неравенства

$$\max_{k \in [0, 1-h_N]} \left\{ k^{1/2}A + (1-h_N-k)^{1/2}B \right\} = (1-h_N)^{1/2}(A^2 + B^2)^{1/2},$$

где $A \geq 0$, $B \geq 0$, и максимум достигается здесь в $r^* = (1-h_N)A^2(A^2+B^2)^{-1/2}$. Оптимизация по $f(\cdot)$ выполнена при ограничении $\int_{t_N}^T |f(s)|_{R(s)}^2 ds = k$. Если λ_{\max} – максимальное собственное число для симметрической и положительно определённой матрицы Q , мы используем тот факт, что $\text{conc } |l|_Q$ на шаре совпадает с $(\lambda_{\max}(1-|l|^2) + |l|_Q^2)^{1/2}$, [10, 11]. Здесь символ $\text{conc } \varphi(l)$ означает минимальную вогнутую функцию, мажорирующую $\varphi(l)$ на единичном шаре. Наконец, используется теорема о минимаксе, [22]. Здесь оптимальное управление $U_N^*(\cdot)$ необходимо удовлетворяет соотношению

$$\int_{t_N}^T r(l^*; s)B(s)dU_N^*(s) = - \max_{s \in [t_N, T]} |r(l^*; s)B(s)|\nu_N,$$

где вектор l^* максимизирует в формуле для $W_N(p, \nu_N)$.

Продолжая вычисления на следующих шагах, приходим к условиям оптимальности для задачи 1. На шаге i получаем

$$W_i(p, \nu_{i:N}) = \max_{|l| \leq 1} \left\{ r(l; t_i)\hat{x}_i - \max_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |r(l; s)B(s)|\nu_i + \varphi_i(l) \right\}, \quad \text{где}$$

$$\varphi_i(l) = \text{conc} \left\{ - \max_{s \in [t_{i+1}, t_{i+2}]} |r(l; s)B(s)|\nu_{i+1} + \max_{f_i(\cdot)} \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} r(l; s)P^{-1}(s)G'(s)R(s)f_i(s)ds + \varphi_{i+1}(l) \right\} \right\}, \quad (22)$$

$$i \in 1 : N-1.$$

Здесь $\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f_i(s)|_{R(s)}^2 ds \leq 1 - h_i$. Оптимальное управление необходимо удовлетворяет соотношениям

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(l^*; s)B(s)dU_i^*(s) = - \max_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |r(l^*; s)B(s)|\nu_i, \quad (23)$$

где l^* максимизирует в задаче (22). Величина функционала в задаче 1 равна $J^* = \min_{\nu_{1:N}} W_1(p, \nu_{1:N}) = W_1(p)$, где $\sum_{i=1}^N \nu_i = \mu$.

Чтобы решить задачу 2, нужно вычислить величины (17), (18). Мы получаем

$$j_i(p) = \max_{|l| \leq 1} \left\{ r(l; t_i)\hat{x}_i - \max_{s \in [t_i, T]} |r(l; s)B(s)|\mu_i + \left((1-h_i) \left(\lambda(t_i)(1-|l|^2) + |D'l|_{P(T, t_i)}^2 \right) \right)^{1/2} \right\}, \quad (24)$$

$$J_i(p, u_i^*) = \max_{f_i(\cdot)} j_{i+1}(p) = \max_{|l| \leq 1} \left\{ r(l; t_i)\hat{x}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} r(l; s)B(s)dU_i^*(s) - \max_{s \in [t_{i+1}, T]} |r(l; s)B(s)|\mu_{i+1} \right. \\ \left. + \left((1-h_i) \left(\lambda(t_{i+1})(1-|l|^2) + |D'l|_{P(T, t_i)}^2 \right) \right)^{1/2} \right\}.$$

Процедура управления в задаче 2 начинается с $i = 1$ и приводит к последовательности позиций p_i , где $j_1(p) \geq j_2(p) \geq \dots \geq j_N(p)$. Действительно, сравним величины $j_i(p)$ и $j_{i+1}(p)$. Если $J_i(p, u_i^{T*}) < j_i(p)$, мы получаем $j_i(p) > j_{i+1}(p)$. Иначе используем управление u_i^{i+1*} , которое минимизирует величину $J_i(p, u_i)$ в (18). Поэтому

$$\min_{u_i(\cdot)} J_i(p, u_i) = \min_{U_i \in \mathcal{U}(\mu_i)} \max_{|l| \leq 1} \left\{ r(l; t_i)\hat{x}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} r(l; s)B(s)dU_i(s) + \text{conc} \left\{ - \max_{s \in [t_{i+1}, T]} |r(l; s)B(s)| \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\mu_i - \int_{t_i}^{t_{i+1}} |dU_i(s)| \right) + \left((1-h_i) \left(\lambda(t_{i+1})(1-|l|^2) + |D'l|_{P(T, t_i)}^2 \right) \right)^{1/2} \right\} \right\} \leq j_i(p).$$

Имеем $\lambda(t_{i+1}) \leq \lambda(t_i)$. Это следует из соотношения

$$\partial P(T, s)/\partial s = -X(T, s)P^{-1}(s)G'(s)R(s)G(s)P^{-1}(s)X'(T, s),$$

откуда в свою очередь следует, что норма симметрической и положительно определённой матрицы $P(T, s)$ убывает по s . Если заменим $\lambda(t_{i+1})$ на $\lambda(t_i)$, левая часть неравенства возрастает, и в $\text{sup}\{\cdot\}$ мы имеем вогнутую функцию по l . Тогда \min и \max можно переставить по теореме о минимаксе. Итак, минимизация по $U_i(\cdot)$ даёт $j_i(p)$.

Замечание 2. Процедура вычисления оптимальных управлений в задаче 1 более сложна, чем в задаче 2. Но мы можем упростить её, если немного увеличим функцию будущих потерь. Докажем неравенство $W_i(p) \leq j_i(p)$, $i \in 1 : N$. Из (22), (24), имеем $W_N(p) = j_N(p)$. По индукции предположим, что $W_{i+1}(p) \leq j_{i+1}(p)$. Тогда из (21):

$$W_i(p) = \min_{U_i(\cdot)} \max_{f_i(\cdot)} W_{i+1}(p) \leq \min_{U_i(\cdot)} \max_{f_i(\cdot)} j_{i+1}(p) = \min_{U_i(\cdot)} \max_{|l| \leq 1} \left\{ r(l; t_i) \hat{x}_i - \max_{s \in [t_{i+1}, T]} |r(l; s)B(s)| \left(\mu_i - \int_{t_i}^{t_{i+1}} |dU_i(s)| \right) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} r(l; s)B(s)dU_i(s) + \left((1 - h_i) \left(\lambda(t_{i+1})(1 - |l|^2) + |D'l|_{P(T, t_i)}^2 \right) \right)^{1/2} \right\}.$$

Если заменим здесь $\lambda(t_{i+1})$ на $\lambda(t_i)$, правая сторона неравенства возрастёт. После этого переставим \max и \min и проведём минимизацию по $U_i(\cdot)$. В результате получим $j_i(p)$. Отметим, что $U_i(s) \equiv 0$, если $\max_{s \in [t_{i+1}, T]} |r(l; s)B(s)| \geq \max_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |r(l; s)B(s)|$. Иначе имеем

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(l^*; s)B(s)dU_i(s) = - \max_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |r(l^*; s)B(s)| \mu_i, \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} |dU_i(s)| = \mu_i, \quad (25)$$

где l^* максимизирует в формуле (24). В этом случае ресурс управления исчерпывается в момент t_{i+1} .

Замечание 3. Из результатов [23] следует, что все элементы проекции на \mathbb{R}^d множества достижимости системы (16) могут быть достигнуты линейной комбинацией не более чем $(d + 1)$ импульсными воздействиями (δ -функциями). Поэтому, оптимальное управление U_i , удовлетворяющее соотношениям вида (23) или (25), имеет не более чем $(d + 1)$ скачков. Если точка лежит на границе множества достижимости, соответствующее управление имеет только d скачков.

4.1 Пример

Рассмотрим уравнение $\dot{x}(t) = B(t)(u(t) + v(t))$, $t \in [0, T]$, где диагональная матрица $B(t) = [b_1(t), 0; 0, b_2(t)] \in \mathbb{R}^2$. Наблюдаем сигнал $y(t) = x(t) + w(t)$, где $\int_0^T (2|v(t)|^2 + |w(t)|^2) dt \leq 1$.

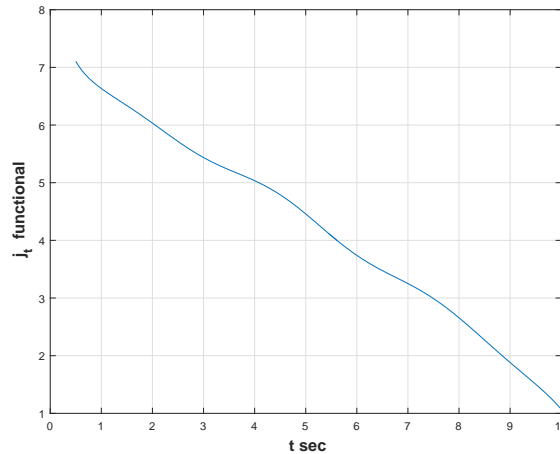


Рис. 2: Изменение функционала будущих потерь

Вектор-функция $U(\cdot)$ стеснена ограничениями (12) с $\mu = 1$. Пусть $b_1(s) = \sqrt{s}$, $b_2(s) = \sqrt{T-s}$, $D = [1, -1]$, $T = 10$. На отрезке $[1/2, T]$ реализуются возмущения $v(t) = [1; 1]\sqrt{2}\sin(t)/7$, $w(t) = 0$, а сигнал на $[0, 1/2]$ равен $y(t) = [1/\sqrt{8} + 1; 1/\sqrt{8} - 1]$. Пусть на отрезке нанесена достаточно частая сетка, где возможна корректировка управления. Оптимальное управление в задаче равно $u_i^*(s) = -D\hat{x}_i B(s)D'\delta(s-T)/T$, если $|D\hat{x}_i| \leq \sqrt{T}$, и $u_i^*(s) = -\text{sign}(D\hat{x}_i)B(s)D'\delta(s-T)/\sqrt{T}$ в противном случае. Таким образом, управление состоит из одного импульса, прилагаемого в конце процесса. Корректирование производится в конце процесса в зависимости от оценки \hat{x}_N , вычисляемой согласно измеренному сигналу. Изменение функционала показано на рисунке 2.

Благодарности

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10146).

Список литературы

- [1] S. T. Zavalishchin, A. N. Sesekin. *Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [2] B. M. Miller, E. Ya. Rubinovich. *Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations*. Automation and Remote Control, 74: 1969–2006, 2013.
- [3] V.A. Dychta, O.N. Samsonyuk. *Optimalnoye impulsnoye upravleniye s prilozheniyami* [Optimal Impulse Control with Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003. (in Russian) = В. А. Дыхта, О. Н. Самсонок. *Оптимальное импульсное управление с приложениями*. Москва. Физматлит, 2003.
- [4] V.P. Maksimov. Positional Parry of Impulse Disturbances in Control Problem for Linear Retarded System. *Vestnik Permskogo universiteta, Seriya: Ekonomika*, 2(21): 6–14, 2014. (in Russian) = В. П. Максимов. Позиционное парирование импульсных возмущений в задаче управления линейной системой с последействием. *Vestnik Permskogo universiteta, Seriya: Ekonomika*, 2(21): 6–14, 2014.
- [5] I.A. Kornilov, A.N. Sesekin. On Stability of Linear Systems with Matrix Containing Generalized Functions. *Vestnik UGTU-UPI*, 3(33):386–388, 2004. (in Russian) = И. А. Корнилов, А. Н. Сесекин. Об устойчивости линейных систем с матрицей, содержащей обобщенные функции. *Vestnik UGTU-UPI*, 3(33):386–388, 2004.
- [6] N.I. Zhelonkina, A.N. Sesekin, S.P. Sorokin. On Stability of Linear Retarded Systems with Impulse Disturbance in the Matrix of the System. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komputernye nauki*, 1:40–46, 2011. (in Russian) = Н. И. Желонкина, А. Н. Сесекин, С. П. Сорокин. Об устойчивости линейных систем с импульсным воздействием в матрице системы и запаздыванием. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komputernye nauki*, 1:40–46, 2011.
- [7] A.N. Sesekin. Dynamical Systems with Nonlinear Impulse Structure. *Sbornik nauchnykh trudov. IMM UrO RAN*, 6(2):497–514, 2000. (in Russian) = А. Н. Сесекин. Динамические системы с нелинейной импульсной структурой *Сборник научных трудов. Тр. ИММ УрО РАН*, 6(2):497–514, 2000.
- [8] R. Pratt (ed). *Flight Control Systems*. The American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA 20191-4344, USA, 2000.
- [9] N. Krasovskii, A. Subbotin. *Game-Theoretical Control Problems*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] A. Kurzhanski, I. Valyi. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. SCFA. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [11] A. Kurzhanski, P. Varaiya. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation*. SCFA. Birkhäuser, Boston, 2014.

- [12] D. Bertsecas, I. Rhodes. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. *IEEE Trans. on Auto. Control*, AC-16:117–128, 1971.
- [13] F. Schweppe. *Uncertain Dynamic Systems*. Prentice Hall, New York, 1973.
- [14] B. Ananyev. Some problems of observations' control. *AIP Conference Proceedings*, 1404:235–241, 2011.
- [15] B. Ananyev, N. Gredasova. Positional and impulse strategies for linear problems of motion correction. *AIP Conference Proceedings*, 1789:34–39, 2016.
- [16] V.A. Dychta, O.N. Samsonyuk. *Optimalnoye impulsnoye upravleniye s prilozheniyami* [Optimal Impulse Control with Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003. (in Russian) = В. А. Дыхта, О. Н. Самсонок. *Оптимальное импульсное управление с приложениями*. Москва. Физматлит, 2003.
- [17] N. Parusnikov, V. Morozov, V. Borzov. *Zadachi korrektsii v inertialnoi navigatsii* [Problems of Correction in Inertial Navigation]. MGU, Moscow, 1982. (in Russian) = Н. Парусников, В. Морозов, В. Борзов. *Задачи коррекции в инерциальной навигации*. МГУ, Москва, 1982.
- [18] F. Chernousko, I. Ananievski, S. Reshmin. *Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [19] D. Liberzon, A. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems *Control Syst. Mag.* 19:59–70, 1999.
- [20] A. N. Sesekin, N. I. Zhelonkina. On the stability of linear systems with generalized action and delay. *IFAC-PapersOnLine, Proceedings of the 18th IFAC World Congress Milano*, 13404–13407, 2011.
- [21] R. Liptser, A. Shiryaev. *Statistics of Random Processes, V.1 General Theory, V.2 Applications. 2-nd ed.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [22] K. Fan. Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 38(2):121–126, 1952.
- [23] L. Newstadt. Optimization, a moment problem, and nonlinear programming. *J. SIAM Control*, 2(1):33–53, 1964.

A condition of stabilizability and motion correction for linear systems with impulse actions and delay

Boris I. Ananyev

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

Natal'ya I. Zhelonkina

Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. Stability and asymptotic stability properties are investigated for linear systems with delay and with impulse action in the system matrix. Impulse methods of motion correction for linear systems without delay are suggested as well. A theorem is proved that provide a sufficient condition of stabilizability for such systems. For control systems without delay, a motion correction problem is considered with the aim to minimize the final functional. An algorithm is given that defines instants of correction. According to the algorithm, the nonincreasing sequence of predictable values of functional is arisen. The results are used in problems of navigation and biophysics.

Keywords: stability; stabilizability; systems with decay; motion correction; impulse controls.