Моделирование потоков платежей с помощью марковских случайных процессов

Г.А. Тимофеева[1,2]
Gtimofeeva@usurt.ru

Я.А. Божалкина[1]
Bozhalkina@mail.ru

1 – Уральский государственный университет путей сообщения (Екатеринбург)
2 – Уральский федеральный университет (Екатеринбург)

Аннотация

Рассматриваются вероятностные модели потока платежей для инвестиционного проекта и для кредитного портфеля. Описаны подходы к получению оценок ожидаемой доходности и риска проекта и кредитного портфеля на основе расчета статистических моментов многошаговой системы, зависящей от марковской цепи. Предложены модели, учитывающие влияние макроэкономических факторов.

Ключевые слова: поток платежей; оценивание; марковский процесс; чистая приведенная стоимость.

1 Введение

Марковские случаные процессы традиционно используются для описания динамики доходности финансовых инструментов. в В статье рассматривается две модели: инвестиционный проект с фиксированными сроком окончания и кредитный портфель.

Несмотря на сходство задач, они существенно отличаются при математическом моделировании. Кредитный портфель состоит из значительного числа (более 10 тыс.) объектов – кредитов, каждый из которых описывается с моделью марковской цепи с дискретным временем и конечным числом состояний [1]. Это позволяет, во-первых, получить достаточно полные статистические данные о переходных вероятностях, и, во-вторых, использовать критерии, основанные на средних значениях.

Ряд авторов использует случайные величины и случайные процессы для моделирования потока платежей инвестиционного проекта или портфеля ценных бумаг. Основным направлением здесь является вероятностное описание дисконтирующего множителя (interest rate) [2]. В статье [3] автор исследует вероятностные модели потока платежей и рассчитывает параметры вероятностных распределений числовых характеристик потока платежей (NPV, IRR) на этой основе.

При использовании марковских случайных процессов для описания потока платежей инвестиционного проекта следует учитывать, что инвестиционный проект – это однократная реализация случайного процесса, здесь учитывать только средние значения нецелесообразно.

2 Поток платежей инвестиционного проекта

Рассмотрим упрощенный случай, когда инвестиции делаются однократно в начальный момент. Обозначим $A(0) > 0$ – вложения в проект, доход в периоде t будем обозначать через $A(t) = A(t, \xi_t)$. Предполагается,

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

что этот доход заранее не известен и зависит от марковского случайного процесса с дискретным временем $\xi_t = \{\xi(1), \ldots, \xi(t)\}$.

При сравнении инвестиционных проектов могут быть использованы различные финансовые показатели: чистая приведенная стоимость проекта – Net Present Value (NPV), внутренняя норма доходности (IRR), срок окупаемости (PBP), эффективный индекс доходности (DPI) и другие показатели [4]. В данной статье доходность проекта будем оценивать на основе его чистой приведенной стоимости (NPV), где [5]:

$$NPV(T) = NPV(T, \xi_T) = -A(0) + \sum_{t=1}^{T} \frac{A(t, \xi_t)}{(1 + r(t))^t}, \tag{1}$$

здесь $r(t)$ – коэффициент дисконтирования, то есть доходность безрисковых вложений за тот же период.

Будем рассматривать модель динамики $NPV(t)$ инвестиционного проекта в форме многошаговой системы. Обозначим через $B(t, \xi_t)$ значение $NPV(t, \xi_t)$. Из определения (1) чистой приведенной стоимости проекта получаем, что многошаговая система [6]

$$B(t + 1, \xi_{t+1}) = B(t, \xi_t) + a(t + 1)A(t + 1, \xi_{t+1}),\ B(0) = A(0), \tag{2}$$

$$a(t + 1) = (1 + r(t))^{-1}a(t), \quad a(0) = 1.$$

описывает изменение чистой приведенной стоимости и может быть основой для оценки статистических параметров (среднего значения, дисперсии, квантили) $B(T, \xi_T) = NPV(T, \xi_T)$ в случае, если получено вероятностное описание дохода за период $A(t) = A(t, \xi_t)$.

Для сравнения чистой приведенной стоимости различных проектов или различных стратегий управления проектом в случае моделирования доходов как случайных величин используются следующие критерии [7]:

- Максимум средней ожидаемой прибыли $\max \overline{NPV}(T)$ за заданный промежуток времени T при фиксированном значении начальных инвестиций $A(0)$.

- Минимум риска. Под риском проекта в финансовом анализе понимается вероятность получения убытков, то есть вероятность отрицательного значения $NPV(T)$

$$\alpha(T) = \mathcal{P}\{NPV(T, \xi_T)\} < 0 \tag{3}$$

- Сочетание этих двух подходов, как двух критериев. Выбирается эффективный проект, то есть Парето-оптимальный по двум критериям.

3 Вероятностное моделирование дохода по проекту за период

Обычно доходы и расходы по инвестиционному проекту за каждый период описываются, как разность доходов и расходов за фиксированный период. Например, в работах [7, 8] используется следующая формула:

$$A(t) = b_1(t)b_2(t) - b_3(t)u(t) - c(t), \tag{4}$$

где $b_1(t)$ – количество проданных товаров, $b_2(t)$ – цена продажи единицы продукции, $b_3(t)$ – затраты на закупку единицы сырья, $u(t)$ – объем закупаемого сырья, $c(t)$ – условно-постоянные расходы.

Будем рассматривать модель, в которой параметры $\mathbf{b}(t) = \{b_1(t), b_2(t), b_3(t)\}$ являются случайными и зависят от состояния экономики. Изменение состояния экономики будем описывать, как марковскую цепь $\xi(t)$ с 3-мя возможными состояниями:

- S_1 – кризисное состояние,

- S_2 – равновесное состояние,

- S_3 – экономический подъем.

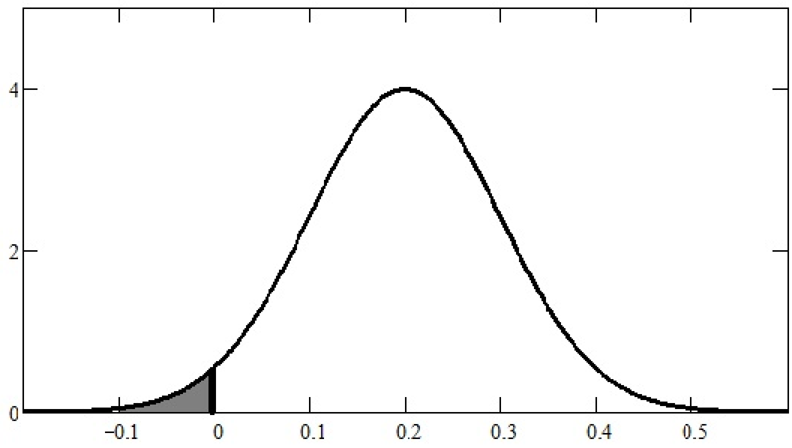

Рис. 1: Риск проекта

Обозначим через e_1, e_2, e_3 базисные вектора, пусть случайный процесс $\zeta(t)$ является индикатором состояния экономики, т.е. $\zeta(t) = e_j$, если экономика находится в j-ом состоянии.

Будем предполагать, что каждый из параметров проекта можно представить в виде двух слагаемых: b_{ij} среднего значения i-го параметра (например, цены продажи) в j-ом состоянии экономики и случайного отклонения от среднего ожидаемого значения $c_i\eta_i(t)$. Например, количество проданного товара $(b_1(t))$ моделируется как $b_1(t) = b_{12} + c_1\eta_1(t)$, если экономика находится в равновесном состоянии, т.е. $\zeta(t) = \{0, 1, 0\}^T = e_2$. Вектор параметров $\mathbf{b}(t)$ при условии $\zeta(t) = e_j$ имеет вид

$$\mathbf{b}_j(t) = B_j\xi(t) + C\eta(t),$$

где $\eta(t)$, $t = 1, 2, ...$ – дискретный случайный процесс с независимыми значениями и стандартным нормальным распределением компонент. Сокращенно математическую модель изменения параметров проекта можно записать в форме

$$\mathbf{b}(t, \xi) = B\zeta(t) + C\eta(t), \tag{5}$$

где B – заданная матрица размера 3×3.

Несмотря на то, что параметры b_1 и b_2 входят выражение для $A(t, \zeta(t), \eta(t))$ мультипликативно, в рассматриваемом случае независимых марковских случайных процессов ζ_t, η_t можно найти условное математическое ожидание и дисперсию $A_j(t) = A(t|\zeta(t) = e_j)$ при условии, что экономика в момент t находится в j-ом состоянии. Отсюда, используя соотношения для моментов многошаговой системы, зависящей от простой марковской цепи [9], получаем прогноз для статистических моментов состояния системы (2). Таким образом, находим прогноз статистических моментов $NPV(T, u_T)$. Обозначим через $m_T = m(T, u_T)$ математическое ожидание чистой приведенной стоимости проекта при заданной стратегии закупки сырья $u_T = \{u(1), \ldots, u(T)\}$, через $s_T = s(T, u_T)$ – среднее квадратичное отклонение этого параметра.

Имитационное моделирование с помощью программы MathCad показало, что распределение чистой приведенной стоимости проекта в рассматриваемых условиях близко к нормальному, что позволяет оценивать риск проекта на основе функции нормального распределения

$$\alpha(T, u_T) = \mathcal{P}\{NPV(T, \xi_T)\} < 0 = 0.5 - \Phi\left(\frac{m_T}{s_T}\right),$$

где $\Phi(z)$ – интегральная функция Лапласа, $\mathcal{P}(B)$ – вероятность события B.

В случае заданной матрицы переходных вероятностей марковской цепи ζ_t для выбранного управления u_T соотношения (4)–(5) вместе с уравнением потока платежей (2) и описанием динамики марковской цепи определяют ожидаемую доходность и риск проекта. Однако, матрица переходных вероятностей известна в данном случае не точно, кроме того, стоит задача выбора оптимального управления (стратегии закупки сырья) u_T, которая пока не решена.

4 Модель динамики структуры кредитного портфеля

В работе [6] предложено описание потоков платежей по кредитному портфелю, в форме случайного процесса зависящего от марковской цепи $\xi_t = \{\xi(0), \ldots, \xi(t)\}$ с k состояниями и дискретным временем. При моделирование динамики структуры портфеля потребительских кредитов, весь портфель разбивается на группы по признаку наличия или отсутствия задолженности и ее срокам. Под состоянием кредита подразумевается принадлежность той или иной группе. Приведем пример простейшего разбиения кредитов на группы для модели марковской цепи с шагом по времени равным 1 кварталу.

1. кредиты без задержек платежей, в том числе новые (S_1);
2. кредиты с задержкой по выплате менее 90 дней (S_2);
3. кредиты с задержкой по выплате от 91 до 180 дней (S_3);
4. кредиты с задержкой более 180 дней – проблемные (S_4);
5. погашенные кредиты (S_5).

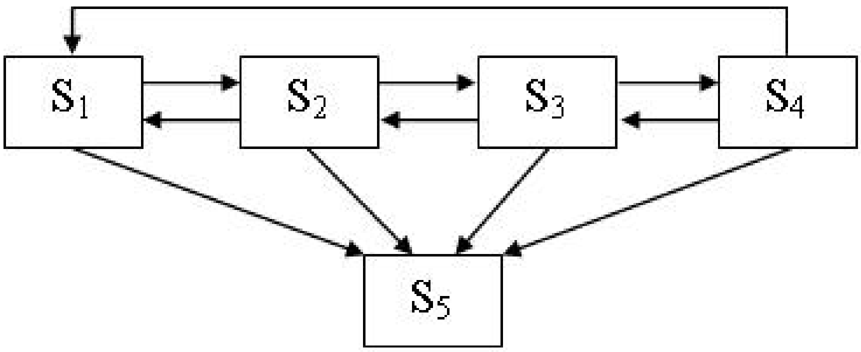

Рис. 2: Граф состояний системы

Обозначим вероятность того, что система находится в i-ом состоянии в момент t через $x_i(t)$:

$$x_i(t) = \mathcal{P}\{\xi(t) = e_i\}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$\{e_1, \ldots, e_k\}$ — базис $\mathbf{R}^k$.

Обозначим через p_{ij} вероятность перехода из состояния S_i в состояние S_j за один шаг

$$\mathcal{P}\{\xi(t+1) = e_j | \xi(t) = e_i\} = p_{ij}.$$

Обозначим через $P = \{p_{ij}\}$ $k \times k$ матрицу переходных вероятностей и $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_k(t)\}^\top$ – вектор вероятностей состояний (долей портфеля). В случае постоянных переходных вероятностей динамика вектора $x(t)$ описывается уравнением

$$x(t+1) = P^\top x(t), \qquad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{6}$$

Следуя подходу, предложенному [10], в работе [11] для описания динамики структуры кредитного портфеля используется модель с переменной матрицей переходных вероятностей

$$x(t+1) = P^\top (Y(t), U(t)) x(t), \tag{7}$$

где матрица переходных вероятностей P зависит от внешних экономических факторов $Y(t)$ и действий менеджмента банка $U(t)$.

Можно использовать другой вариант описания зависимости структуры кредитного портфеля от состояния экономики. Будем полагать, что в зависимости от состояния экономики S_j матрица переходных вероятностей принимает одно из 3-х возможных значений: $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ или $P^{(3)}$. Таким образом, изменение структуры портфеля будет описываться системой со случайной структурой

$$x(t+1) = P^\top (\zeta(t), U) x(t), \tag{8}$$

где $\zeta(t)$ – марковская цепь, описывающая изменение состояния экономики.

5 Поток платежей по кредитному портфелю

Рассмотрим поток платежей по кредитному договору с постоянными выплатами (аннуитетными платежами) с начальной суммой $D(0)$. Обозначим ежеквартальный платеж по договору через $d = d_b D(0)$, где коэффициент d_b определяется по известной формуле [5] исходя из процентной ставки по кредиту b.

Через $D(t, \xi_t)$ обозначим сумму основного долга в период t. Платеж $A(t, \xi_t)$ в период $t + 1$ является случайной величиной и связан с переходом договора из одной группы в другую. Если номер группы не меняется в период $t+1$ (за исключением кредитов из проблемной группы), то это означает, что аннуитетный платеж d оплачен:

$$A(t+1, \xi_{t+1}) = d, \quad D(t+1, \xi_{t+1}) = (1+b)D(t, \xi_t) - d.$$

Если платеж не оплачен, то номер группы увеличивается на 1 или не изменяется для группы проблемных кредитов:

$$A(t+1, \xi_{t+1}) = 0, \quad D(t+1, \xi_{t+1}) = (1+b)D(t, \xi_t),$$

и т.д. В случае погашения кредита в период $t + 1$ кредит переходит в последнюю группу (погашенных кредитов)

$$A(t+1, \xi_{t+1}) = (1+b)D(t, \xi_t), \quad D(t+1, \xi_{t+1}) = 0.$$

Получаем многошаговую систему, описывающую платежи по кредиту $A(t, \xi_t)$ и изменение основного долга $D(t, \xi_t)$, вида [6]:

$$A(t+1) = \xi(t)^\top (d \cdot C_1 + (1+b)D(t)C_2)\xi(t+1), \quad t = 0, \ldots, T, \tag{9}$$

$$D(t+1) = (1+b)D(t) - \xi(t)^\top (d \cdot C_1 + (1+b)D(t)C_2)\xi(t+1), \quad D(0) = A(0), \tag{10}$$

где C_1 и C_2 – заданные $k \times k$ матрицы, учитывающие, в том числе, выплату штрафов за просроченные платежи.

Уравнения (9)–(10) вместе с уравнением потока платежей (2) и описанием динамики долей кредитного портфеля (6) определяют распределение случайной величины $B(T) = NPV(T)$. Если матрица переходных вероятностей P задана, то мы можем найти среднее и дисперсию чистой приведенной стоимости портфеля ($NPV(T)$) и её , используя соотношения из статьи [9] для моментов линейной многошаговой стохастической системы, зависящей от простой марковской цепи. На основе этих параметров оценивается риск дефолта по портфелю, т.е. вероятность $\alpha(T)$ события $NPV(T) < 0$.

Если при анализе динамики структуры портфеля выявлены зависимости от внешнеэкономических факторов в форме (7), то поток платежей по кредитному портфелю, а также оценка ожидаемой доходности и риска портфеля зависят от прогноза макроэкономических показателей $\hat{Y}_T = \hat{Y}(t), \ldots, \hat{Y}(T)$. В этом случае для прогнозирования чистой приведенной стоимости портфеля удобнее применять имитационное моделирование, с помощью которого получаются оценки статистических моментов случайной величины $B(t, \hat{Y}_T)$, удовлетворяющей соотношениям (1), (9)–(10), (7).

Заключение

В статье предложена модель прогнозирования чистой приведенной стоимости проекта для случая, когда поток платежей по проекту описывается марковским случайным процессом, зависящим от дискретной марковской цепи связанной с состоянием экономики.

Описан подход к получению оценок ожидаемой доходности и риска проекта и кредитного портфеля на основе расчета статистических моментов стохастической многошаговой системы, учитывающей прогноз макроэкономических факторов.

Список литературы

[1] G. Timofeeva, N. Timofeev. Evaluation of Payment Flows Based on Markov Chain Model with Incomplete Information. *AIP Conference Proceedings*, 631:17–22, 2014.

[2] V. I. Klokov, S. I. Kichko. Probabilistic assessment of the effectiveness of investment projects with use of discounting in risk. *Ekonomika i upravlenie*, (3):82–87, 2009. (in Russian) = В. И. Клоков, С. И. Кичко. Вероятностная оценка эффективности инвестиционных проектов с использованием дисконтирования в условиях риска. *Экономика и управление*, (3):82–87, 2009.

[3] D. Fantazzini. Credit Risk Management. *Applied Econometrics*, 12(4):105–138, 2008. = Д. Фантаццини. Управление кредитным риском. *Прикладная эконометрика*, 12(4):105–138, 2008.

[4] E. V. Bucenko. Development of an expert system for investment design. *Ekonomicheskie issledovanija*, (3):3–15, 2012. (in Russian) = Е. В. Буценко. Разработка экспертной системы инвестиционного проектирования. *Экономические исследования*, (3):3–15, 2012.

[5] V. I. Shiryaev. *Finansovaja matematika: Potoki platezhej, proizvodnye finansovye instrumenty* [Financial Mathematics: Payment Flows, Derivative FinancialInstruments]. Moscow, USSR.RU, 2011. (in Russian) = В. И. Ширяев. *Финансовая математика: Потоки платежей, производные финансовые инструменты.* Москва, USSR.ru, 2011.

[6] G. A. Timofeeva. Estimation of the dynamics of the process depending on the Markov chain with incomplete information. *12-oe Vserossijskoe soveshhanie po problemam upravlenija. Trudy* [The 12th All-Russian Conference on Control. Proceedings]. Moscow, ISS RAS: 1225-1230, 2014. (in Russian) = Г. А. Тимофеева. Оценивание динамики процесса, зависящего от марковской цепи с неполной информацией. *12-ое Всероссийское совещание по проблемам управления. Труды.* Москва, ИПУ РАН: 1225-1230, 2014.

[7] G. M. Vakulina Probabilistic models in the investment projects assessment. *Herald of USURT*, 9(1):93–100, 2011. (in Russian) = Г. М. Вакулина. Вероятностные модели в оценке инвестиционных проектов. *Вестник УрГУПС*, 9(1):93–100, 2011.

[8] D. S. Zavalishchhin, T. V. Zav'yalova. Application of stochastic modeling to evaluate the effectiveness of an investment project. *Informacionnye tehnologii modelirovanija i upravlenija*, 101(5):371–381, 2016. (in Russian) = Д. С. Завалищин, Т. В. Завьялова. Применение стохастического моделирования для оценки эффективности инвестиционного проекта. *Информационные технологии моделирования и управления*, 101(5):371–381, 2016.

[9] T. V. Zav'yalova, I. Ya. Kats, G. A. Timofeeva. Stochastic System with a Ramdom Jump in Phase Trajectoty: Stability of Their Motion. *Automation and Remote Control*, 63(7):1070–1079, 2002. = Т. В. Завьялова, И. Я. Кац, Г. А. Тимофеева. Об устойчивости систем со случайным условием скачка фазовой трактории. *Автоматика и телемеханика*, (7):33–43, 2002.

[10] A. Caja, Q. Guibert, F. Planchet. Influence of Economic Factors on the Credit Rating Transitions and Defaults of Credit Insurance Business. *Working Papers*, hal-01178812, HAL, 2015.

[11] G. Timofeeva, Ya. Bozhalkina. Markov model of the loan portfolio dynamics considering influence of management and external economic factors. *AiP Conference Proceedings*, 1789(020023), 2016.

Modelling of cash flows by means of Markov processes

Galina A. Timofeeva
Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Yana A. Bozhalkina
Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. Probabilistic models of cash flow for an investment project and for a loan portfolio are considered. The approaches to the estimation of profitability and risk of the project and the loan portfolio are obtained on the basis of calculation of statistical moments multistep system, which depends on the Markov chain. Models, taking into account the changes in macroeconomic factors, are proposed.

Keywords: payment flow, evaluation, Markov process, net present value.