

Построение стационарных восходящих закрученных вихрей в окрестности конического контактного разрыва

С.П. Баутин
SBautin@usurt.ru

С.Л. Дерябин
SDeryabin@usurt.ru

А.В. Мезенцев
AMezentsev@usurt.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (Екатеринбург)

Аннотация

Рассматриваются стационарные трехмерные течения идеального политропного газа, примыкающие через коническую контактную поверхность к области покоя в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. Показано, что такие течения описываются решениями соответствующей начально-краевой задачи для системы уравнений газовой динамики, которые в работе строятся в виде сходящихся рядов. Коэффициенты этих рядов определяются в параметрической форме при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Параметры газа на контактной поверхности и в ее окрестности восстанавливаются численно.

Ключевые слова: математическое моделирование; восходящие закрученные потоки; торнадо; стационарные трехмерные течения; идеальный политропный газ; коническая контактная поверхность; сила тяготения, сила Кориолиса; система уравнений газовой динамики; сходящиеся ряды.

Задачи о математическом моделировании течений в восходящих закрученных потоках типа торнадо и тропический циклон при учете действия сил тяжести и Кориолиса рассматривались ранее, см. например, [1–7]. В работах [1–3] предложена и обоснована схема зарождения и функционирования восходящего закрученного потока газа. В частности доказано, что в таких потоках закрутка в северном полушарии происходит против хода часовой стрелки, а в южном - по ходу часовой стрелки. В работах [4, 5] рассматривались течения политропного газа в восходящем закрученном потоке в некоторой окрестности вертикально расположенной контактной характеристики кратности пять, разделяющей газ и вакуум. Показано, что и в случае примыкания газа к вакууму закрутка газа происходит в соответствующую сторону, а также установлено, что сам вихрь движется на запад, немного смещаясь к северу. В работах [6, 7] строились течения газа также в окрестности контактной характеристики, но кратности два и являющейся непроницаемой плоскостью $z = 0$.

В данной работе рассматривается течение газа в некоторой окрестности конической контактной характеристики кратности два, разделяющей восходящий закрученный поток и покоящийся газ. В работах [1–3] описана схема течения в восходящем закрученном потоке, соответствующая структуре течения у тропических циклонов и сформировавшихся разрушительных торнадо. В частности предполагается существование

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at <http://ceur-ws.org>

области покоящегося газа вдоль вертикальной оси потока, которая в случае тропического циклона обычно называется «глаз тайфуна».

Значения переменной z будет отсчитываться от поверхности Земли. Построение и исследование течения будет проводиться в окрестности точки $M_0(r_{00} + kz_{00}, \varphi_{00}, z_{00})$, $r_{00}, \varphi_{00}, z_{00} = \text{const} > 0, k \geq 0$.

Постановка задачи

Будут рассматриваться стационарные изэнтропические течения политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами: $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука газа; u – радиальная составляющая вектора скорости газа; v – окружная составляющая вектора скорости газа; w – вертикальная составляющая вектора скорости газа. Здесь ρ – плотность газа, γ – показатель политропы газа и для воздуха обычно полагается $\gamma = 1.4$. Газодинамические параметры зависят от независимых переменных: r – полярного радиуса в плоскости xOy ; φ – полярного угла; z – третьей пространственной координаты.

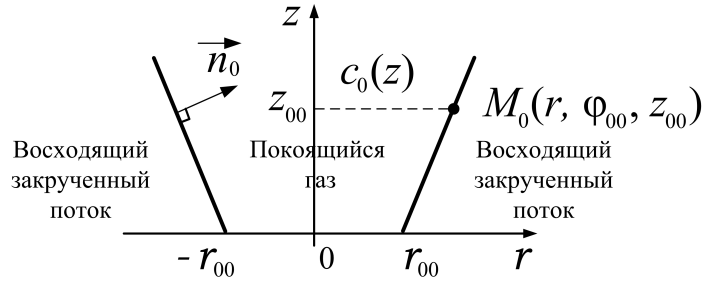


Рис. 1: коническая контактная поверхность $r = r_0(z) = r_{00} + kz$

В этом случае стационарная система уравнений газовой динамики имеет следующий вид [8]:

$$\begin{cases} uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}cc_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{cases} \quad (1)$$

в которой $a = 2\Omega \sin \psi$, $b = 2\Omega \cos \psi$, Ω – модуль угловой скорости вращения Земли, ψ – широта точки ($r = 0, z = 0$) на поверхности Земли, $g = \text{const} > 0$ – ускорение свободного падения.

Будем искать конические характеристики этой системы в виде

$$r = r_0(z) = r_{00} + kz, \quad r_{00} > 0, \quad z_{00} > 0.$$

В системе (1) введем новую независимую переменную $\eta = r - r_0(z)$, не меняя переменных z, φ : $z' = z, \varphi' = \varphi$ [3]. Производные по r, φ, z пересчитываются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} - k \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Штрихи у независимых переменных в дальнейшем опускаются.

При этой замене переменных система (1) переходит в следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u - kw)c_\eta + \frac{v}{\eta + r_0(z)}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma - 1)}{2}c(u_\eta - kw_\eta + \frac{u + v_\varphi}{\eta + r_0(z)} + \\ + w_z) = 0, \\ (u - kw)u_\eta + \frac{v}{\eta + r_0(z)}u_\varphi - \frac{v^2}{\eta + r_0(z)} + wu_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_\eta = \\ = av - bw \cos \varphi, \\ (u - kw)v_\eta + \frac{uv}{\eta + r_0(z)} + \frac{v}{\eta + r_0(z)}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}\frac{1}{\eta + r_0(z)}cc_\varphi = \\ = -au + bw \sin \varphi, \\ (u - kw)w_\eta + \frac{v}{\eta + r_0(z)}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_z - \frac{2k}{(\gamma - 1)}cc_\eta = \\ = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (2)$$

Приравнивая к нулю определитель при выводящих производных $\frac{\partial}{\partial \eta}$, получаем следующее уравнение [9]

$$\begin{vmatrix} u - kw & \frac{(\gamma - 1)}{2}c & 0 & -\frac{(\gamma - 1)k}{2}c \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c & u - kw & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u - kw & 0 \\ -\frac{2k}{(\gamma - 1)}c & 0 & 0 & u - kw \end{vmatrix} = 0$$

Вычисляя определитель, имеем

$$(u - kw)^2[(u - kw)^2 - c^2(1 + k^2)] = 0.$$

Приравнивая нулю сомножители из правой части уравнения, определяем соотношения между параметрами газа на характеристике $\eta = 0$:

1. При соотношении между параметрами газа

$$u = kw \quad (3)$$

получаем, что поверхность $\eta = 0$ есть характеристика кратности 2;

2. При соотношениях между параметрами газа $u = kw \pm c\sqrt{1 + k^2}$ поверхность $\eta = 0$ есть C^\pm характеристика, каждая кратности 1.

Далее поставим начально-краевую задачу на характеристике $\eta = 0$ кратности 2.

Считая известной функцию $c_0 = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - g(\gamma - 1)z}$ поставим следующие начальные условия на $\eta = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c|_{\eta=0} = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - g(\gamma - 1)z}; \\ u|_{\eta=0} = kw_0(\varphi, z); \\ v|_{\eta=0} = v_0(\varphi, z); \\ w|_{\eta=0} = w_0(\varphi, z). \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь c_{00} есть константа, с помощью которой при $z = 0$ задается значение скорости звука газа, покоящегося при $0 \leq r \leq r_0(z)$. Сама функция $c_0(z)$ передает скорость звука газа, покоящегося в поле тяжести. Значение $u|_{\eta=0}$ будем искать по формуле $u_0 = kw_0$. Значение нормальной составляющей скорости газа u_N к поверхности $\eta = 0$ найдем по формуле

$$u_N = (\vec{U}, \vec{n}_0).$$

Здесь $\vec{U} = \{u, w\}$, $\vec{n}_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \right\}$, – единичный нормальный вектор к линии $r = r_0(z)$.

Вычисляя u_n , получаем

$$u_N = u_0 \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - w_0 \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{u_0 - kw_0}{\sqrt{1+k^2}} = 0.$$

Следовательно второе условие из соотношения (4) гарантирует, что нормальная составляющая скорости газа $u_n = 0$, то есть характеристика $r = r_0(z)$ является контактной поверхностью. Функции v_0 и w_0 , входящие в данные (4), пока не определены.

Пусть для задачи (2), (4), заданы два дополнительных условия

$$\begin{cases} v(\eta, \varphi, z)|_{z=z_{00}} = v^0(\eta, \varphi); \\ w(\eta, \varphi, z)|_{z=z_{00}} = w^0(\eta, \varphi); \end{cases} \quad (5)$$

с аналитическими в окрестности точки $(\eta = 0, \varphi = \varphi_{00}, z = z_{00})$ функциями $v^0(\eta, \varphi)$, $w^0(\eta, \varphi)$, которые удовлетворяют условиями согласования

$$\begin{cases} v^0(\eta, \varphi)|_{\eta=0} = v_0(\varphi, z)|_{z=z_{00}} = v_{00}(\varphi); \\ w^0(\eta, \varphi)|_{\eta=0} = w_0(\varphi, z)|_{z=z_{00}} = w_{00}(\varphi). \end{cases} \quad (6)$$

Далее будет предполагаться, что $v_{00}(\varphi) \neq 0$, $w_{00}(\varphi) \neq 0$.

Для задачи (2), (4), (5) справедлива следующая теорема

Теорема. *Задача (2), (4), (5) имеет в некоторой окрестности точки $(\eta = 0, \varphi = \varphi_{00}, z = z_{00})$ единственное аналитическое решение.*

Доказательство теоремы проводится сведением задачи (2), (4), (5) к характеристической задаче Коши стандартного вида, для которой справедлив аналог теоремы Ковалевской [9]. Непосредственные выкладки проводятся по методике из книги [9] и здесь не приводятся.

Построение аналитического решения задачи (2), (4), (5)

Решение задачи (2), (4), (5) будем строить в виде ряда по степеням η .

$$\mathbf{f}(\eta, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}_n(\varphi, z) \frac{\eta^n}{n!}, \quad \mathbf{f} = \{c, u, v, w\}. \quad (7)$$

В системе (5) положим $\eta = 0$ и при обозначениях

$$c_r|_{\eta=0} = c_1; \quad u_r|_{\eta=0} = u_1; \quad w_r|_{\eta=0} = w_1,$$

получим следующие четыре соотношения:

$$\begin{cases} w_0 c_{0z} + \frac{(\gamma-1)}{2} c_0 \left(u_1 - kw_1 + \frac{1}{r_0} (v_{0\varphi} + kw_0) + w_{0z} \right) = 0, \\ \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_1 = -\frac{kv_0 w_{0\varphi}}{r_0} - kw_0 w_{0z} + av_0 - b \cos \varphi w_0 + \frac{1}{r_0(z)} v_0^2, \\ \frac{1}{r_0(z)} v_0 v_{0\varphi} + w_0 v_{0z} = (-ak + b \sin \varphi) w_0 - \frac{kv_0 w_0}{r_0(z)}, \\ \frac{1}{r_0(z)} v_0 (w_{0\varphi} + ku_{0\varphi}) + w_0 (w_{0z} + ku_{0z}) = k \frac{v_0^2}{r_0(z)} + (ak - b \sin \varphi) v_0. \end{cases} \quad (8)$$

Причем в четвертом из них учтен конкретный вид функции $c_0(z)$ из условий (4).

Из первых двух равенств, входящих в систему (8), однозначно в некоторой окрестности точки $z = z_{00}, \varphi = \varphi_0$ ($z_{00} > 0, 0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$) определяются c_1 при условии выполнения неравенства

$$c_{00} > g(\gamma - 1)z_{00}$$

и алгебраическое соотношение между u_1 , w_1 , поскольку $r_0(z_{00}) > 0$, $c_0(z_{00}) > 0$.

Последние два равенства, входящие в систему (8), являются необходимыми условиями разрешимости характеристической задачи Коши [9] и из них следует, что функции v_0 и w_0 , нельзя брать произвольными. Они должны удовлетворять двум последним соотношениям из системы (8). Из равенства $u_0 = kw_0$ найдем производные

$$u_{0\varphi} = kw_{0\varphi}, \quad u_{0z} = kw_{0z}$$

Подставляя полученные производные в третье и четвертое уравнение системы (8), получим

$$\begin{cases} v_{0\varphi} + \frac{r_0(z)w_0}{v_0}v_{0z} = (-ak + b \sin \varphi) \frac{r_0(z)w_0}{v_0} - kw_0, \\ w_{0\varphi} + \frac{r_0(z)w_0}{v_0}w_{0z} = \frac{1}{1+k^2} (ak - b \sin \varphi) r_0(z) + \frac{k}{1+k^2}v_0. \end{cases} \quad (9)$$

С начальными условиями, полученными из условий (6)

$$\begin{aligned} v_0(\varphi, z)|_{z=z_{00}} &= v_{00}(\varphi); \\ w_0(\varphi, z)|_{z=z_{00}} &= w_{00}(\varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

С помощью введения параметра τ [10], система (9) из двух уравнений с частными производными сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = 1; & \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_0(z)w_0}{v_0}; \\ \frac{dv_0}{d\tau} = (-ak + b \sin \varphi) \frac{r_0(z)w_0}{v_0} - kw_0; \\ \frac{dw_0}{d\tau} = \frac{r_0(z)}{1+k^2} (ak - b \sin \varphi) + \frac{k}{1+k^2}v_0. \end{cases} \quad (11)$$

Для системы (11) получаются следующие начальные условия

$$\varphi|_{\tau=0} = \varphi_{00}, \quad z|_{\tau=0} = z_{00}, \quad v_0|_{\tau=0} = v_{00}(\varphi_{00}), \quad w_0|_{\tau=0} = w_{00}(\varphi_{00}). \quad (12)$$

Интегрируя первое уравнение системы (11) получаем $\varphi = \tau + \varphi_{00}$. Следовательно систему (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= \frac{r_0(z)w_0}{v_0}; \\ \frac{dv_0}{d\tau} &= (-ak + b \sin(\tau + \varphi_{00})) \frac{r_0(z)w_0}{v_0} - kw_0; \\ \frac{dw_0}{d\tau} &= \frac{k}{1+k^2} (ak - b \sin(\tau + \varphi_{00})) + \frac{k}{1+k^2}v_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Задача (11), (12) имеет единственное аналитическое решение. Предположение $v_{00}(\varphi_{00}) > 0$, $w_{00}(\varphi_{00}) > 0$ гарантирует, что исследуемое течение является восходящим закрученным потоком.

Следовательно, из необходимых условий разрешимости характеристической задачи Коши (2), (4), то есть из задачи (11), (12). Функции v_0 , w_0 , входящие в условия (4), определяются однозначно и являются аналитическими функциями двух параметров τ, φ_{00} в некоторой окрестности точки ($\tau = 0, \varphi = \varphi_{00}$).

Об одном свойстве решений задачи (2), (4), (5)

Умножая второе уравнение системы (13) на $\frac{1}{1+k^2}v_0$, а третье уравнение на w_0 и складывая их, получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{1+k^2}v_0v_{0\tau} + w_0w_{0\tau} = 0.$$

Уравнение (14) имеет общее решение, удовлетворяющее следующему равенству:

$$v_0^2 + (1+k^2)w_0^2 = C^2 = v_{00}^2(\varphi_{00}) + (1+k^2)w_{00}^2(\varphi_{00}). \quad (14)$$

Следовательно на контактной поверхности $r = r_0(z)$ вдоль бихарактеристики системы (2) имеет место **Закон сохранения.** Если уменьшается (увеличивается) модуль вертикальной составляющей вектора скорости газа, то увеличивается (уменьшается) модуль окружной составляющей вектора скорости газа в соответствии с формулой (14).

Интегрируя первое уравнение системы (13), имеем

$$z = z_0(\tau, \varphi_{00}) = -r_{00} + \frac{z_{00}}{k} \exp\left(k \int_0^\tau \frac{w_0(\tau, \varphi_{00})}{v_0(\tau, \varphi_{00})} d\tau\right).$$

Далее будем считать известными функции $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$, $v_0 = v_0(\tau, \varphi_{00})$, $w_0 = w_0(\tau, \varphi_{00})$ и следовательно $u_0 = kw_0(\tau, \varphi_{00})$.

Нулевые коэффициенты ряда (7) определились как функции двух параметров τ и φ_{00} . Чтобы получить эти коэффициенты как функции переменных z и φ , то есть из бихарактеристик построить интегральные поверхности [10], необходимо параметры τ и φ_{00} выразить через переменные z и φ .

Якобиан преобразования вычисляется по следующим формулам

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_\tau & \varphi_{\varphi_{00}} \\ z_{0\tau} & z_{0\varphi_{00}} \end{vmatrix} = z_{0\varphi_{00}} - z_{0\tau}.$$

Вычислим $z_{0\varphi_{00}}$

$$z_{0\varphi_{00}} = z_{00} \exp\left(k \int_0^\tau \frac{w_0(\tau, \varphi_{00})}{v_0(\tau, \varphi_{00})} d\tau\right) \int_0^\tau \left(\frac{w_0}{v_0}\right)'_{\varphi_{00}} d\tau. \quad (15)$$

Поскольку $z_{0\tau} = r_0(z) \frac{w_0(\tau, \varphi_{00})}{v_0(\tau, \varphi_{00})}$, окончательно имеем

$$J = -r_0(z) \frac{w_0(\tau, \varphi_{00})}{v_0(\tau, \varphi_{00})} + z_{00} \exp\left(k \int_0^\tau \frac{w_0(\tau, \varphi_{00})}{v_0(\tau, \varphi_{00})} d\tau\right) \int_0^\tau \left(\frac{w_0}{v_0}\right)'_{\varphi_{00}} d\tau. \quad (16)$$

Подставляя в соотношение (16) $\tau = 0$, будем иметь

$$J|_{\tau=0} = -r_0(z) \frac{w_{00}(\varphi_{00})}{v_{00}(\varphi_{00})} \neq 0.$$

Поскольку $J|_{\tau=0} \neq 0$, то в окрестности точки $(z = z_{00}, \varphi = \varphi_{00})$ единственным образом определяются функции

$$\tau = \varphi - f(\varphi, z), \quad \varphi_{00} = f(\varphi, z).$$

Функция c_1 определяется из второго соотношения (8). Для определения $u_1 - kw_1$ необходимо получить w_{0z} , $v_{0\varphi}$ как функции двух параметров τ и φ_{00} .

Производные по φ и z вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} v_{0\varphi} &= v_{0\tau} + (v_{0\varphi_{00}} - v_{0\tau})f_\varphi, & w_{0\varphi} &= w_{0\tau} + (w_{0\varphi_{00}} - w_{0\tau})f_\varphi, \\ v_{0z} &= (v_{0\varphi_{00}} - v_{0\tau})f_z, & w_{0z} &= (w_{0\varphi_{00}} - w_{0\tau})f_z, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$f_\varphi = -\frac{z_{0\tau}}{J}, \quad f_z = \frac{1}{J}, \quad J = z_{0\varphi_{00}} - z_{0\tau}.$$

Формулы (17) позволяют получить $u_1 - r_{0z}w_1$ как функцию двух параметров τ и φ_{00} . Продифференцируем систему (2) по η , положим $\eta = 0$, будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = kw_2 - w_{1z} - \frac{v_{1\varphi} + kw_1}{r_0(z)} - \frac{2}{(\gamma - 1)c_0}w_1c_{0z} + F_{11}(\varphi, z); \\ \frac{2c_0}{(\gamma - 1)}c_2 = -\frac{kv_0w_{1\varphi}}{r_0(z)} - kw_0w_{1z} + (a - \frac{kw_0\varphi - 2v_0}{r_0(z)})v_{1-} - \\ - (b\cos\varphi - k(\frac{1}{r_0(z)}(v_0\varphi + kw_0) + \frac{2}{(\gamma - 1)c_0}w_0c_{0z}))w_1 + F_{21}(\varphi, z); \\ \frac{v_0}{r_0(z)}v_{1\varphi} + w_0v_{1z} - (w_{0z} + \frac{2}{(\gamma - 1)c_0}w_0c_{0z})v_{1+} + \\ + (v_{0z} + ak - b\sin\varphi + \frac{kv_0}{r_0(z)})w_1 = F_{31}(\varphi, z); \\ (1 + k^2)(\frac{v_0}{r_0(z)}w_{1\varphi} + w_0w_{1z}) + (\frac{w_0\varphi}{r_0(z)} - ak + b\sin\varphi - \frac{2kv_0}{r_0(z)})v_{1-} - \\ - (1 + k^2)(\frac{v_0\varphi + kw_0}{r_0(z)} + \frac{2}{(\gamma - 1)c_0}w_0c_{0z})w_1 = F_{41}(\varphi, z). \end{array} \right. \quad (18)$$

После введения характеристического параметра τ система (18) сводится к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_1}{d\tau} - \frac{r_0}{v_0}(w_{0z} + \frac{2c_{0z}}{(\gamma - 1)c_0}w_0)v_{1+} + \\ + \frac{r_0}{v_0}(v_{0z} + ar_{0z} - b\sin(\tau + \varphi_{00}) + \frac{r_{0z}v_0}{r_0})w_1 = \\ = \frac{r_0}{v_0}F_{31}(\tau + \varphi_{00}, z_0(\tau + \varphi_{00})); \\ \frac{dw_1}{d\tau} + \left(\frac{w_0\varphi}{v_0} - \frac{2r_{0z}}{(1 + r_{0z}^2)} + \frac{1}{(1 + r_{0z}^2)}(b\sin(\tau + \varphi_{00}) - ar_{0z})\frac{r_0}{v_0} \right) v_{1-} - \\ - \left(\frac{v_0\varphi + r_{0z}w_0}{v_0} + \frac{2c_{0z}}{(\gamma - 1)c_0}\frac{r_0w_0}{v_0} \right) w_1 = \\ = \frac{1}{(1 + r_{0z}^2)}\frac{r_0}{v_0}F_{41}(\tau + \varphi_{00}, z_0(\tau + \varphi_{00})). \end{array} \right. \quad (19)$$

Соотношения на бихарактеристике сохраняются в виде

$$\varphi = \tau + \varphi_{00}, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_0(z)w_0}{v_0}.$$

Начальные условия для систем (19) получаются из условий (5), если функции $v^0(\eta, \varphi)$, $w^0(\eta, \varphi)$ продифференцировать по η и положить $\eta = 0$.

В параметрической форме начальные данные имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_{00}, & z(0) &= z_{00}, \\ v_1(0) &= v_\eta^0(0, \varphi_{00}), & w_1(0) &= w_\eta^0(0, \varphi_{00}). \end{aligned} \quad (20)$$

Задача (19), (20) имеет единственное решение. Таким образом найдены функции v_1 , w_1 и следовательно из соотношения (3) u_1 . Из первых двух соотношений (18) однозначно находятся c_1 и $u_2 - kw_2$.

Продифференцируем систему (2) n раз по η , положим $\eta = 0$, после преобразований будем иметь

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = kw_{n+1} - w_{nz} - \frac{v_{n\varphi} + kw_n}{r_0(z)} - \frac{2}{(\gamma-1)c_0}w_n c_{0z} + F_{1n}(\varphi, z); \\ \frac{2c_0}{(\gamma-1)}c_{n+1} = -\frac{kv_0 w_{n\varphi}}{r_0(z)} - kw_0 w_{nz} + (a - \frac{kw_0\varphi - 2v_0}{r_0(z)})v_n - \\ - (b \cos \varphi - nk(\frac{1}{r_0(z)}(v_0\varphi + kw_0) + \frac{2}{(\gamma-1)c_0}w_0 c_{0z}))w_n + F_{2n}(\varphi, z); \\ v_{n\varphi} + \frac{r_0(z)w_0}{v_0}v_{nz} = n\frac{r_0(z)}{v_0}(w_{0z} + \frac{2}{(\gamma-1)c_0}w_0 c_{0z})v_n - \\ - \frac{r_0(z)}{v_0}(v_{0z} + ak - b \sin \varphi + \frac{kv_0}{r_0(z)})w_n + F_{3n}(\varphi, z); \\ w_{n\varphi} + \frac{r_0(z)w_0}{v_0}w_{nz} = (-\frac{w_0\varphi}{v_0} + \frac{1}{1+k^2}(ak - b \sin \varphi)\frac{r_0(z)}{v_0} + \frac{2k}{1+k^2})v_n + \\ + \frac{r_0(z)}{v_0}[(n-1)w_{0z} + \frac{n}{r_0(z)}(v_0\varphi + kw_0) + \frac{2n}{(\gamma-1)c_0}w_0 c_{0z}]w_n + F_{4n}(\varphi, z). \end{array} \right. \quad (21)$$

Здесь F_{in} , ($i = 1, 2, 3, 4$) – функции, известным образом зависящие от ранее найденных коэффициентов ряда (7).

Вводя в третьем и четвертом уравнении системы (21) характеристический параметр τ , получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_n}{d\tau} - n\frac{r_0(z)}{v_0}(w_{0z} + \frac{2}{(\gamma-1)c_0}w_0 c_{0z})v_n + \frac{r_0(z)}{v_0}(v_{0z} + ak - \\ - b \sin(\tau + \varphi_{00}) + \frac{kv_0}{r_0(z)})w_n = F_{31}(\tau + \varphi_{00}, z_0(\tau + \varphi_{00})); \\ \frac{dw_n}{d\tau} + (\frac{w_0\varphi}{v_0} - \frac{1}{1+k^2}(ak - b \sin(\tau + \varphi_{00}))\frac{r_0(z)}{v_0} - \frac{2k}{1+k^2})v_n - \\ - \frac{r_0(z)}{v_0}[(n-1)w_{0z} + \frac{n}{r_0(z)}(v_0\varphi + kw_0) + \frac{2n}{(\gamma-1)c_0}w_0 c_{0z}]w_n = \\ = F_{4n}(\tau + \varphi_{00}, z_0(\tau + \varphi_{00})). \end{array} \right. \quad (22)$$

Соотношения на бихарактеристике сохраняются в виде

$$\varphi = \tau + \varphi_{00}, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_0(z)w_0}{v_0}.$$

Начальные условия для систем (22) получаются из условий (5), если функции $v^0(r, \varphi)$, $w^0(r, \varphi)$ разложить в ряд по степеням $r - r_{00}$.

$$\mathbf{f}^0(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}^0_n(\varphi) \frac{\eta^n}{n!}, \quad \mathbf{f}^0 = \{v^0, w^0\}. \quad (23)$$

В параметрической форме начальные данные имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_{00}, & z(0) &= z_{00}, \\ v_n(0) &= v_n^{0(n)}(0, \varphi_{00}), & w_n(0) &= w_n^{0(n)}(0, \varphi_{00}). \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом в виде рядов (7) построено единственное локально аналитическое решение задачи (2), (4), (5).

Численное моделирование течения газа на вертикальной контактной поверхности и в ее окрестности

Для построения конкретных течений газа положим $k = 0$, тогда контактная поверхность будет иметь уравнение $r = r_{00}$ – цилиндр. В этом случае удалось проинтегрировать третье и четвертое уравнения системы (11). Получены следующие формулы:

$$w_0(\varphi) = br_{00} \cos(\varphi) + w_{00} - br_{00} \cos(\varphi_{00}),$$

$$v_0(\varphi) = \sqrt{C^2 - (br_{00} \cos(\varphi) + w_{00} - br_{00} \cos(\varphi_{00}))^2},$$

где $C = \sqrt{v_{00}^2 + w_{00}^2}$.

Далее расчеты проводились по этим формулам и уравнениям для бихарактеристик

$$\varphi = \tau + \varphi_{00}, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_{00}w_0}{u_0}.$$

Для расчетов были выбраны следующие безразмерные величины:

$$\gamma = 1.4, \quad b = 0.001379, \quad r_{00} = 1, \quad z_{00} = 0.00027,$$

$$c_{00} = 1, \quad v_{00} = 0.159, \quad w_{00} = 0.0024.$$

При введении безразмерных переменных в качестве масштабов скорости и расстояния взяты соответственно $\frac{1}{3}10^3$ м/с и 3650 м, тогда использованные входные данные соответствуют тропическому циклону средней интенсивности, находящемуся на широте $\psi = \frac{\pi}{6}$ [3]. В восходящем закрученном потоке с приведенными значениями входных констант частица газа, сделав полный оборот по поверхности цилиндрической контактной поверхности с размерным значением ее радиуса $r_{00} = 3650$ м, поднялась на высоту в 3462 м.

На рис. 2 приведены бихарактеристики $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$, при численном построении которых с шагом $\Delta\tau = 0.001$ выбирались точки (φ_k, z_k) : фиксировалось φ_{00} , вычислялось $\varphi_k = \tau_k + \varphi_{00}$ и $z_k = z_0(\tau_k, \varphi_{00})$.

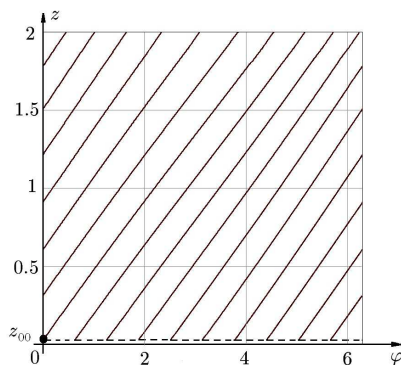


Рис. 2: бихарактеристики $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$

Таким образом была построена неравномерная сетка для переменных φ, z . В узлах этой сетки и вычислялись значения функций $v_0(\varphi, z)$, $w_0(\varphi, z)$. В результате были численно построены интегральные поверхности для параметров газа на контактном разрыве. На рис. 3, 4 приведены интегральные поверхности для функций $v_0(\varphi, z)$, $w_0(\varphi, z)$.

На рис. 5, 6 приведены интегральные поверхности для выводящих с контактной поверхности производных $c_1(\varphi, z)$, $u_1(\varphi, z)$, также численно построенные в узлах упомянутой сетки.

Рассчитанные значения $c_1(\varphi, z)$ и $u_1(\varphi, z)$ в рассматриваемой области имеют положительные значения. Следовательно, при отходе от контактной поверхности $r = r_{00}$ в область искомого течения при $r > r_{00}$ значения скорости звука возрастают, а значения радиальной скорости становятся положительными и тоже возрастают. Это качественно согласуется со свойствами течений, построенных с помощью разложений решений системы уравнений газовой динамики по степеням малых параметров Ω и g [1–3].

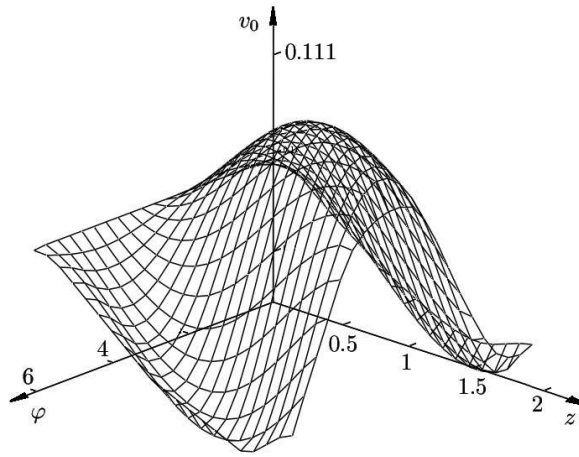


Рис. 3: интегральная поверхность для функции $v_0(\varphi, z)$

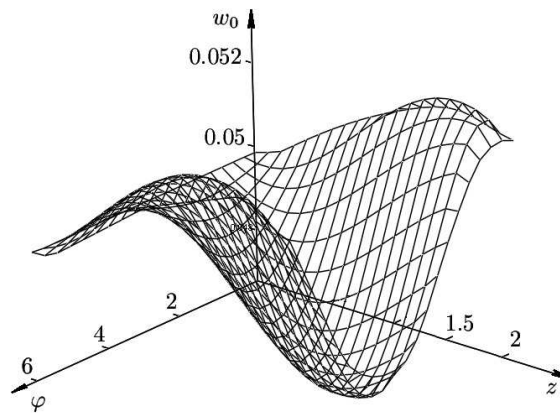


Рис. 4: интегральная поверхность для функции $w_0(\varphi, z)$

Список литературы

- [1] S. P. Bautin. *Tornado and Coriolis force*. Novosibirsk, Nauka, 2008. (in Russian) = С. П. Баутин *Торнадо и сила Кориолиса*. Новосибирск, Наука, 2008.
- [2] S. P. Bautin, A. G. Obuhov. *Mathematical modeling of destructive atmospheric vortices*. Novosibirsk, Nauka, 2012. (in Russian) = С. П. Баутин, А. Г. Обухов *Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей*. Новосибирск, Наука, 2012.
- [3] S. P. Bautin, I. Y. Krutova, A. G. Obuhov, K. B. Bautin. *Destructive atmospheric vortices: theorems, calculations, experiments*. Yekaterinburg, USURT, 2013. (in Russian) = С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов, К. В. Баутин. *Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты*. Екатеринбург, Изд-во УрГУПС, 2013.
- [4] S. L. Deryabin, A. V. Mezentsev. Evolution of gas flows adjacent to the vacuum under the action of gravitational forces and Coriolis. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, Yekaterinburg, UrO RAN, 2010. (in Russian) = С. Л. Дерябин, А. В. Мезенцев. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. *Труды института математики и механики УрО РАН*, Екатеринбург, УрО РАН, 2010.
- [5] S. L. Deryabin, A. V. Mezentsev. Numerical-analytical modeling of gas flows adjacent to vacuum under conditions of gravity and Coriolis forces. *Computational Technologies*, 15(5):51-71, 2010. (in Russian)

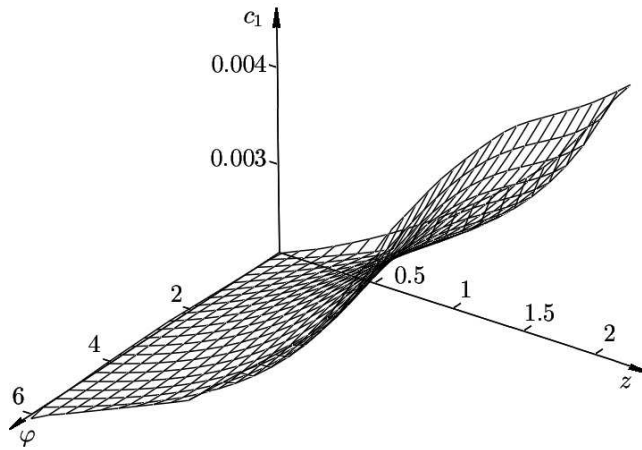


Рис. 5: интегральная поверхность для функции $c_1(\varphi, z)$

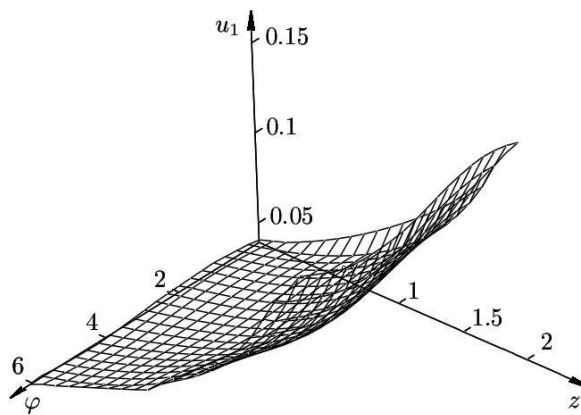


Рис. 6: интегральная поверхность для функции $u_1(\varphi, z)$

= С. Л. Дерябин, А. В. Мезенцев. Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. *Вычислительные технологии*, 15(5):51-71, 2010.

- [6] I. Y. Krutova. The problem of the motion of a gas under the action of gravity and Coriolis in the vicinity of an impenetrable horizontal plane. *Herald of the Ural State University of Railway Transport Scientific-technical journal*, 10(1):14–21, 2012. (in Russian) = И. Ю. Крутова. Задача о движении газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости. *Вестник УрГУПС*, 10(1):14–21, 2012.
- [7] I. Y. Krutova. A three-dimensional stationary gas flow, under the action of gravitational forces and Coriolis in the vicinity of an impenetrable horizontal plane. *Herald of the Ural State University of Railway Transport Scientific-technical journal*, 15(3):16–24, 2012. (in Russian) = И. Ю. Крутова. Трехмерный стационарный поток газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости. *Вестник УрГУПС*, 15(3):16–24, 2012.
- [8] N. E. Kochin, I. A. Kibel, N. V. Rose. *Theoretical hydromechanics*. Р. 2. Moscow, Fizmatgiz, 1963. (in Russian) = Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. *Теоретическая гидромеханика*. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963.

- [9] S. P. Bautin. *The Cauchy characteristic problem and its applications in gas dynamics*. Novosibirsk, Nauka, 2009. (in Russian) = С. П. Баутин. *Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике*. Новосибирск, Наука, 2009.
- [10] R. Courant. *Partial differential equations*. New York. London. 1962.

Construction of stationary rising swirling flows in the neighborhood of the conical contact discontinuity

Sergey P. Bautin

Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)

Sergey L. Deryabin

Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)

Aleksey V. Mezentsev

Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. Stationary three-dimensional flows of an ideal polytropic gas adjacent through the conical contact surface to rest area under the action of gravity and coriolis forces are under consideration. It is shown that such flows are described by solutions of the corresponding initial boundary value problem for the system of equations gas dynamics, which are constructed in the form of convergent series. The coefficients of these series are determined in parametric form by the solution of systems of ordinary differential equations. Gas parameters on the contact surface and in its neighborhood restored numerically.

Keywords: mathematical modeling; rising swirling flows; tornado; stationary three-dimensional flow; ideal polytropic gas; conical contact surface; the force of gravity and Coriolis; the equations of gas dynamics; convergent series.