Задача выживания в популяционных моделях

Ю.Ф. Долгий
Yurii.Dolgii@imm.uran.ru

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург)

Аннотация

Для популяционных динамических систем вводится понятие выживаемости решений. Получены условия выживания решений в популяционной модели Хатчинсона. Исследуется множество выживаемости популяционной модели.

Ключевые слова: динамические модели с последействием, популяционные модели, выживаемость популяции, множество выживаемости.

1 Введение

Проблема выживаемости чрезвычайно важна для существования популяции и давно привлекает внимание исследователей. Накопленный статистический материал позволяет составлять демографические таблицы смертности по возрастам. Роберт Перль ввел кривые выживаемости I, II и III типов, которые отличаются различными скоростями вымирания в раннем, среднем и старом возрастах. Вопросы исчезновения видов в популяционных системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и не учитывающих эффекты последействия, исследовал В. Вольтерра [1]. При решении проблемы исчезновения видов он использовал предельные значения численности видов при неограниченном возрастании времени.Указанный подход применялся при анализе условий выживаемости популяции, математическая модель которой описывается дифференциальным уравнением Николсона с запаздыванием, в работе [3]. При определении понятия выживаемости популяций, математические модели которых описываются динамическими системами с последействием, в данной статье используется подход, описанный в [4]. Для популяционной модели Хатчинсона установлена возможность потери выживаемости решений на конечном промежутке времени. Найдено аналитическое представление максимального множества выживаемости этой популяции в течении нескольких поколений.

2 Выживаемость в популяционных моделях

Изучается замкнутая популяционная система в ограниченном ареале обитания, состоящая из n видов. Учитывается влияние последействия на динамику популяционной модели. При формировании популяции в новом ареале обитания на начальном промежутке времени $[-h, 0]$, $h > 0$, допускается возможность миграции. После окончания процесса формирования популяции в момент времени $t = 0$ миграция прекращается. Неоднородности в распределениях численности видов по ареалу обитания и возрастам особей не рассматриваются. Математические модели, учитывающие неоднородности таких распределений, приведены в работах [2, 5, 6]. В данной статье численности видов популяционной системы характеризуются

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

плотностями N_k, $k=\overline{1,n}$, их распределений в заданном ареале, зависят от времени и начальных распределений φ_k, $k=\overline{1,n}$.

Условия корректности динамической популяционной модели обеспечивают для любой

$$\varphi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n \in \Phi=\{\varphi(\cdot)\in \mathbf{C}\left([-h,0],\mathbf{R}^n\right):\, \varphi_k(\vartheta)\geq 0,\, \vartheta\in[-h,0),\, \varphi_k(0)>0,\, k=\overline{1,n},\} \tag{1}$$

существование решения $N(t,\varphi)=\{N_k(t,\varphi)\}_{k=1}^n$, $t>0$, на положительной полуоси и инвариантность множества $\{N\in\mathbf{R}^n:\, N_k>0,\, k=\overline{1,n},\}$. В монографии В. Вольтерра [1] исследовалась задача исчезновения видов. В настоящей работе выживание вида определяется способностью его к воспроизводству особей. Формализация понятия выживаемости популяционной системы опирается на математическую теорию выживаемости решений дифференциальных уравнений [4].

О п р е д е л е н и е 1. Решение популяционной модели $N(\cdot,\varphi)$ выживает на отрезке $[0,T]$, если выполняются неравенства $N_k(t,\varphi)\geq\delta_k$, $t\in[0,T]$, $k=\overline{1,n}$. Здесь δ_k, $k=\overline{1,n}$,— заданные пороговые плотности численности видов.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $S_T\sqsubseteq\Phi$ называется множеством выживаемости популяционной модели на отрезке $[0,T]$, если любое решение $N(\cdot,\varphi)$, $\varphi\in S_T$, выживает на этом отрезке.

В теории конечномечномерных динамических систем используются понятия выживаемости решений и множества выживаемости, предложенные Ж.П. Обеном. В [4] требование выживания решения связано с существованием отрезка $[0,T]$, на котором график решения принадлежит инвариантному множеству динамической системы. Этот подход к описанию свойства выживаемости решения был перенесен в работах [7, 8] на динамические системы с последействием, при описании которых использовалось функциональное пространство состояний. В данной работе при изучении свойства выживаемости решений не используются эволюционные свойства динамической системы с последействием и в качестве пространства состояний выбирается $\mathbf{R}^n$. Важные приложения теория выживаемости решений получила при исследовании управляемых динамических систем [9, 10, 11, 12].

Для популяционных систем принципиальное значение имеет конкретный вид множества S_T , а не его инвариантность. Длина отрезка, на котором выживает решение популяционной системы, также имеет важное значение. Поэтому отличия определений 1 и 2 от классических связаны со спецификой популяционной динамической системы. Отказ от требования инвариантности множества выживаемости технически упрощает задачу его нахождения. Для выживания популяционной системы требуется выживание всех видов, т.к. в результате потери способности к воспроизводству одного вида, старая популяционная система заменяется новой популяционной системой. В монографии В. Вольтера [1] рассматривается задача нахождения условий, при выполнении которых один из видов исчезает при неограниченном возрастании времени или сохраняются все виды. Математические условия сохранения всех видов в монографии В. Вольтера сводятся к инвариантности множества $\{N\in\mathbf{R}^n:\, N_k>0,\, k=\overline{1,n},\}$. В нашей работе эти условия В. Вольтера предполагаются выполненными, а, собственно, условия выживаемости требуют превышения для плотностей численности всех видов заданных пороговых уровней. Подход В. Вольтера использовался в работе А.Д. Хохлова [3], посвященной выживаемости популяции в модели Николсона, описываемой дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt}=-\delta x(t)+px(t-\tau)\exp(-\alpha x(t-\tau)). \tag{2}$$

В ней найдены предельные значениями решений: при $\delta<p<\delta e$ имеем $\lim\inf_{t\to\infty} x(t)=\eta=\alpha^{-1}\ln(p/\delta)$, а при $e\delta<p$ имеем $\lim\inf_{t\to\infty} x(t)\geq\eta=\frac{p^2}{\alpha e\delta^2}\exp(-\frac{p}{e\delta})$. В работах В. Вольтера и А.Д. Хохлова возможности потери выживаемости решениий в конечный момент времени не обсуждались. В настоящей статье для популяционной модели Хатчинсона [13] обсуждаются вопросы выживаемости на конечном отрезке времени.
.

3 Свойства решений уравнения Хатчинсона

Рассмотрим дифференциальное уравнение Хатчинсона [13]

$$\frac{dN(t)}{dt}=rN(t)\left(1-\frac{N(t-h)}{K}\right),\, t>0, \tag{3}$$

где r — мальтузианский коэффициент, K — емкость среды обитания, h — средний репродуктивный возраст популяции. Уравнение (3) имеет единственное положение равновесия $N(t) = K = const$ устойчивое при $rh < \pi/2$, неустойчивое при $rh > \pi/2$ и устойчивое в целом при $rh < 37/24$. При $rh > e^{-1}$ каждое решение уравнения (1) имеет бесконечное число перерегулирований с положением равновесия. При $rh > \pi/2$ имеется нетривиальное периодическое решение [14, 15, 16].

В статье [17] для T_* - периодического решения уравнения (1) получены асимптотические формулы $(\lambda = rh \gg 1)$:

$$\max_{0\le t\le T_*} N(t,\lambda) = e^{\lambda-1} + (2e)^{-1} + O(e^{-\lambda}),\ T_*(\lambda) = \frac{1+e^{\lambda}}{\lambda} + O\left((\lambda e^{\lambda})^{-1}\right), \tag{4}$$

$$\min_{0\le t\le T_*} N(t,\lambda) = exp\left[-e^{\lambda} + 2\lambda - 1 + \frac{1+(1+\lambda)\ln\lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^2}\right)\right]. \tag{5}$$

Из последних формул следует, что при больших значениях величины $\lambda = rh$ T_*- периодическое решение уравнения (3) не выживает. Указанное периодическое решение орбитально устойчиво [17]. Поэтому все решения уравнения (3) из области притяжения этого периодического решения не выживают на отрезке $[0, T]$ при больших значениях T.

При $K > \delta$ положение равновесия уравнения (3) выживает на любом конечном отрезке. При $rh < \pi/2$ существует окрестность положения равновесия такая, что все решения из этой окрестности выживают на любом конечном отрезке. Если $h = 0$, то уравнение Хатчинсона совпадает с обыкновенным дифференциальным уравнение, описывающем популяционную модель Ферхюльста. При $K > \delta$ и $\varphi(0) \ge \delta$ все решения уравнения Ферхюльста выживают. Следовательно, появление невыживающих решений связано с учетом последействия в популяционной модели.

4 Популяционное давление

Для произвольной функции $\varphi \in \Phi$ введем измеримые множества

$$E^+(\varphi) = \{\vartheta \in [-h,0] : \varphi(\vartheta) > K\},\ E^-(\varphi) = \{\vartheta \in [-h,0] : \varphi(\vartheta) < K\}, \tag{6}$$

$$E^+_\vartheta(\varphi) = E^+(\varphi)\bigcap[-h,\vartheta],\ E^-_\vartheta(\varphi) = E^-(\varphi)\bigcap[-h,\vartheta],\ \vartheta \in [-h,0]. \tag{7}$$

Л е м м а 1. *Пусть пороговая плотность численности популяции $\delta < K$ и начальная функция $\varphi \in \Phi_\delta = \{\varphi \in \Phi : \varphi(0) \ge K\}$. Решение уравнения Хатчинсона $N(\cdot,\varphi)$, $\varphi \in \Phi_\delta$, выживает на отрезке $[0, T]$, $0 < T \le h$, тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\Phi^+(\vartheta,\varphi) \le \Phi^-(\vartheta,\varphi) - \frac{1}{r}\ln\frac{\delta}{\varphi(0)},\ \vartheta \in [-h, T-h]. \tag{8}$$

Здесь

$$\Phi^+(\vartheta,\varphi) = \int\limits_{E^+_\vartheta(\varphi)} \left(\frac{\varphi(s)}{K} - 1\right),\ \Phi^-(\vartheta,\varphi) = \int\limits_{E^-_\vartheta(\varphi)} \left(1 - \frac{\varphi(s)}{K}\right),\ \vartheta \in [-h,0]. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для выживания решения $N(t,\varphi)$, $t \ge -h$, уравнения Хатчинсона на отрезке $[0, T]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$N(t,\varphi) = \varphi(0)\exp\left(r\int\limits_0^t \left(1 - \frac{\varphi(s-h)}{K}\right)ds\right) \ge \delta \tag{10}$$

при всех $t \in [0, T]$. Последнее неравенство выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (8).

Неубывающая функция $\Phi^+(\vartheta,\varphi)$, $\vartheta \in [-h,0]$, характеризует популяционное давление на этапе формирования популяции в заданном ареале. Если для функции $\varphi \in \Phi_\delta$ имеем $\Phi^+(0,\varphi) = \int\limits_{E^+(\varphi)} \left(\frac{\varphi(s)}{K} - 1\right) ds = 0$, то отсутствует популяционное давление на этапе формирования популяции и решение уравнения

Хатчинсона выживает на отрезке $[0,h]$. Если мера множества $E^+(\varphi)$ отлична от нуля, то величина $\frac{1}{\mu E^+(\varphi)} \int\limits_{E^+(\varphi)} \left(\frac{\varphi(s)}{K} - 1\right) ds$ определяет среднее значение популяционного давления на этапе формирования популяции. Используя свободу выбора функции $\varphi \in \Phi_\delta$, можно неограничено увеличивать среднее значение популяционного давления на этапе формирования популяции, что приводит к потере выживаемости решения уравнения Хатчинсона на отрезке $[0,h]$ в силу неравенства (8).

При $\varphi(0) = \delta$ и $\varphi(-h) > K$ решение $N(\cdot,\varphi)$, $\varphi \in \Phi_\delta$, не имеет отрезка выживания.

Т е о р е м а 1. *Для любого $0 < T \le h$ найдется решение $N(\cdot,\varphi)$, $\varphi \in \Phi_\delta$, не выживающее на отрезке $[0,T]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\varphi(0) > \delta$ и $\varphi(-h) > K$ существует отрезок выживания $[0,\tau]$, для которого выполняются неравенства

$$\min_{\vartheta \in [-h,\tau-h]} \varphi(\vartheta) > K,\ \Phi^+(\vartheta,\varphi) \le -\frac{1}{r} \ln \frac{\delta}{\varphi(0)},\ \vartheta \in [-h, \tau - h]. \tag{11}$$

Используя определение функции $\Phi^+(\cdot,\varphi)$, находим оценку

$$\tau \left(\frac{1}{K} \min_{\vartheta \in [-h,\tau-h]} \varphi(\vartheta) - 1\right) \le -\frac{1}{r} \ln \frac{\delta}{\varphi(0)}. \tag{12}$$

При увеличении $\min\limits_{\vartheta \in [-h,\tau-h]} \varphi(\vartheta)$ длина отрезка выживания $[0,\tau]$ стремится к нулю.

Введем обозначения $N_n(\vartheta,\varphi) = N(nh+\vartheta,\varphi)$, $n \ge 1$, $N_0(\vartheta,\varphi) = \varphi(\vartheta)$, $\varphi \in \Phi$, $\vartheta \in [-h,0]$. Используя метод шагов для интегрирования дифференциального уравнения с запаздыванием [19], находим реккурентные формулы для решения уравнения (3)

$$N_n(\vartheta,\varphi) = N_{n-1}(0,\varphi) \exp\left(r \int\limits_{-h}^{\vartheta} \left(1 - \frac{N_{n-1}(s,\varphi)}{K}\right) ds\right),\ \vartheta \in [-h,0],\ n \ge 1. \tag{13}$$

Найдем условия выживания решения уравнения Хатчинсона в течении M поколений.

Т е о р е м а 2. *Пусть пороговая плотность численности популяции $\delta < K$ и начальная функция $\varphi \in \Phi_\delta$. Решение уравнения Хатчинсона $N(\cdot,\varphi)$, $\varphi \in \Phi_\delta$, выживает на отрезке $[0,T]$, $T = Mh$, $M \ge 1$, тогда и только тогда, когда выполняются неравенства*

$$\Phi^+(\vartheta, N_{m-1}(\cdot,\varphi)) \le \Phi^-(\vartheta, N_{m-1}(\cdot,\varphi)) - \frac{1}{r} \ln \frac{\delta}{N_{m-1}(0,\varphi)},\ \vartheta \in [-h,0],\ 1 \le m \le M. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость теоремы следует из формул (13).

В теореме 2, в случае фиксированного значения $\varphi(0)$, при $M = 1$ начальная функция выживающего решения удовлетворяет неоднородному линейному операторному неравенству, а при $M > 1$ — неоднородному линейному операторному неравенству и $M - 1$ нелинейному операторному неравенству. При увеличении длины отрезка выживания увеличивается число ограничений, наложенных на начальную функцию выживающего решения.

Сужение множества начальных функций Φ_δ позволяет предложить более простые условия выживаемости решения уравнения Хатчинсона.

Пусть множество $E_*(\varphi) = \{\vartheta_* \in [-h,0] : \varphi(\vartheta_*) = K\} \bigcup 0$ — конечно и $\Phi^*_\delta = \left\{\varphi \in \mathbf{C}^1[-h,0] : \varphi(0) > \delta,\ \varphi'(\vartheta_*) \ne 0,\ \vartheta_* \in E_*(\varphi)\right\}$. Из конечности множества $E_*(\varphi)$ следует конечность всех множеств $E_*((N_m(\cdot,\varphi))$, $m \ge 1$. Обозначим через n_m число точек в множестве $E_*((N_m(\cdot,\varphi))$, $m \ge 0$. Справедливы неравенства $n_m \le n_{m-1} + 1$, $m \ge 1$.

Л е м м а 2. *Решение уравнения Хатчинсона $N(\cdot,\varphi)$, $\varphi \in \Phi^*_\delta$, выживает на отрезке $[0,T]$, $0 < T \le h$, тогда и только тогда, когда выполняются неравенства*

$$\Phi^+(\vartheta_*,\varphi) \le \Phi^-(\vartheta_*,\varphi) - \frac{1}{r} \ln \frac{\delta}{\varphi(0)},\ \vartheta_* \in E^-_*(\varphi) \bigcup [-h, -h+T], \tag{15}$$

где $E^-_*(\varphi) = \{\vartheta_* \in E_*(\varphi) : \varphi'(\vartheta_*) < 0,\ \varphi \in \Phi^*_\delta\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки локального максимума функции $\Phi^+(\vartheta,\varphi)-\Phi^-(\vartheta,\varphi)=\int\limits_{-h}^{\vartheta}(\varphi(s)-1)\,ds$, $\vartheta\in[-h,0]$, принадлежат множеству $E^-_*(\varphi)$. Тогда из неравенства (8) следует (15) и, обратно, из (15) следует (8).

Т е о р е м а 3. *Решение уравнения Хатчинсона* $N(\cdot,\varphi)$, $\varphi\in\Phi^*_\delta$, *выживает на отрезке* $[0,T]$, $T=Mh$, *тогда и только тогда, когда выполняются неравенства*

$$\Phi^+(\vartheta_{*m},N_{m-1}(\cdot,\varphi))\le\Phi^-(\vartheta_{*m},N_{m-1}(\cdot,\varphi))-\frac{1}{r}\ln\frac{\delta}{N_{m-1}(0,\varphi)},\ \vartheta_{*m}\in E^-_*(N_{m-1}(\cdot,\varphi)),\ 1\le m\le M. \quad (16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки локального максимума функций $\Phi^+(\vartheta,N_{m-1}(\cdot,\varphi))-\Phi^-(\vartheta,N_{m-1}(\cdot,\varphi))=\int\limits_{-h}^{\vartheta}(N_{m-1}(s,\varphi)-1)\,ds$, $\vartheta\in[-h,0]$, принадлежат множествам $E^-_*(N_{m-1}(\cdot,\varphi))$, $1\le m\le M$. Тогда из неравенства (14) следует (16) и, обратно, из (16) следует (14).

В теореме 3, в случае фиксированного значения $\varphi(0)$, при $M=1$ начальная функция выживающего решения удовлетворяет конечному числу неоднородных линейных функциональных неравенств, а при $M>1$ — конечному числу неоднородных линейных функциональных неравенств и конечному числу нелинейных функциональных неравенств. При увеличении длины отрезка выживания увеличивается число ограничений, наложенных на начальную функцию выживающего решения.

Дальнейшее сужение множества начальных функций Φ^*_δ связано с перехом к множествам полиномов фиксированных порядков $K\ge1$ с простыми нулями, которые будем обозначать Φ^K_δ, $K\ge1$. Объединение этих множеств также как объединение множеств Φ^*_δ всюду плотны в множестве начальных функций Φ_δ. Для множеств Φ^K_δ, $K\ge1$, справедливы лемма 2 и теорема 3. Их можно использовать при аппроксимации множества Φ_δ.

5 Множество выживаемости

В этом разделе рассматривается масштабированная популяционная модель Хатчинсона, описываемая дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\frac{dN(t)}{dt}=\lambda N(t)\left(1-N(t-1)\right),\ t>0. \quad (17)$$

Переход к масштабированной модели осуществляется с помощью замен переменных $t/h\to t$, $N/K\to N$. При этом переменный параметр r заменяется на $\lambda=rh$, а пороговый уровень плотности численности популяции δ — на δ/K. Из леммы 1 и теоремы 2 следует, что длина отрезка выживаемости решения при фиксированной функции $\varphi\in\Phi_\delta$ не увеличивается (уменьшается) при возрастании параметра $\lambda=rh$, т.е. мальтузианского коэффициента и величины репродуктивного возраста, а также уменьшения емкости среды K и увеличении величины порогового уровеня плотности численности популяции δ.

Уравнение (17) совпадает с (3) при значениях параметров $h=1$, $K=1$. В этом разделе обозначение δ используется для безразмерного порогового уровеня плотности численности популяции. В дальнейшем предполагается, что $\delta<1$. Множество выживаемости зависит от параметра $\lambda>0$. Поэтому для него будем использовать новое обозначение $S_T(\lambda)$, T, $\lambda>0$.

В этом разделе ставится задача нахождения максимального множества выживаемости.

Положение равновесия модели Хатчинсона $N(t)=1$, $t\ge-1$, существует при всех $\lambda>0$ и выживает на любом конечном отрезке $[0,T]$, $T>0$. Поэтому для любого отрезка множество выживаемости не пусто. Для уравнения (17) имеет место непрерывная зависимость решений задачи Коши от начальных функций [20]. Поэтому для любого отрезка внутренность множества выживаемости $S_T(\lambda)$ модели Хатчинсона не пусто. Множества выживаемости обладают следующими свойствами $S_{T_2}(\lambda)\subseteq S_{T_1}(\lambda)$ при $0<T_1<T_2$.

Функции $N_n(\vartheta,\varphi)$, $n\ge0$, $\vartheta\in[-1,0]$, $\varphi\in\Phi$, принадлежат инвариантному функциональному пространству состояний $\mathbf{C}[-1,0]$ для уравнения Хатчинсона [20]. Введение порогового уровня приводит к дополнительным ограничениям, т.к. множество $\Phi_\delta\subset\mathbf{C}[-1,0]$ не является инвариантным множеством для этого уравнения. Для любого $T>0$ множество выживаемости $S_T(\lambda)\subset\Phi_\delta$. Если инвариантное множество $I(\lambda)$ уравнения Хатчинсона удовлетворяет условию $I(\lambda)\subset\Phi_\delta$, то оно принадлежит множеству выживаемости $S_T(\lambda)$ при всех $T>0$, т.е. $I(\lambda)\subseteq\bigcap\limits_{T>0}S_T(\lambda)$. При $0<\lambda<\pi/2$ положение равновесия

$N(t) = 1$, $t \geq -1$, асимптотически устойчиво [20] и существует инвариантная область его притяжения, принадлежащая множеству Φ_δ и множеству выживаемости $S_T(\lambda)$ при всех $T > 0$. При $\lambda > \pi/2$ существует орбитально устойчивое периодическое решение [20]. Из (5) следует, что существует такое значение параметра $\lambda_*(\delta)$, для которого при $\pi/2 < \lambda \leq \lambda_*(\delta)$ периодическое решение выживает на любом конечном отрезке $[0, T]$, $T > 0$, а при $\lambda > \lambda_*(\delta)$ периодическое решение не выживает на полуинтервале $[0, +\infty)$. Следовательно, при $\pi/2 < \lambda \leq \lambda_*(\delta)$ существует инвариантная область притяжения орбитально устойчивого периодического решения, принадлежащая множеству Φ_δ и множеству выживаемости $S_T(\lambda)$ при всех $T > 0$. При $\pi/2 < \lambda < \lambda_*(\delta)$ начальная функция периодического решения является внутренней точкой множества выживаемости. Используя формулу (5) можно найти следующую асимптотику $\lambda_*(\delta) = O\left(\ln(\ln(\delta^{-1}))\right)$, $\delta \to 0$. В работах [4, 7, 8] при определении множества выживаемости требуется его инвариантность. В настоящей статье это требование снимается, что упрощает процедуру построения множества выживаемости.

Л е м м а 3. *Для уравнения Хатчинсона множество выживаемости является выпуклым, если* $0 < T \leq 1$, *т.е. для любых функций* $\varphi_1, \varphi_2 \in S_T(\lambda)$, $\lambda > 0$, *функции* $\varphi = \mu\varphi_1 + (1-\mu)\varphi_2$ *принадлежат множеству* $S_T(\lambda)$ *при любых значениях параметра* $0 \leq \mu \leq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $0 < T \leq 1$ имеем $N_1(\vartheta, \varphi_1) \geq \delta$ и $N_1(\vartheta, \varphi_2) \geq \delta$ для всех $\vartheta \in [-1, -1+T]$. Рассмотрим функции $\varphi(\vartheta) = \mu\varphi_1(\vartheta) + (1-\mu)\varphi_2(\vartheta)$, $\vartheta \in [-1, -1+T]$, где $0 \leq \mu \leq 1$. Из формул (13) при $n = 1$ имеем

$$N_1(\vartheta, \varphi) = \varphi(0) \exp\left(\lambda \int\limits_{-1}^{\vartheta} (1 - \varphi(s))\, ds\right), \ \vartheta \in [-1, -1+T]. \tag{18}$$

Отсюда, при $\vartheta \in [-1, -1+T]$ находим

$$N_1(\vartheta, \varphi) = (\mu\varphi_1(0) + (1-\mu)\varphi_2(0)) \left(\frac{N_1(\vartheta, \varphi_1)}{\varphi_1(0)}\right)^{\mu} \left(\frac{N_1(\vartheta, \varphi_2)}{\varphi_2(0)}\right)^{1-\mu} \geq \tag{19}$$

$$\frac{\delta\left(\mu\varphi_1(0) + (1-\mu)\varphi_2(0)\right)}{\varphi_1^{\mu}(0)\varphi_2^{1-\mu}(0)} = \delta F(\mu). \tag{20}$$

При $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ имеем $F(\mu) \equiv 1$, $\mu \in [0, 1]$, что доказывает утверждение. Рассмотрим случай $\varphi_1(0) \neq \varphi_2(0)$, $\varphi_1(0) \geq \delta$, $\varphi_2(0) \geq \delta$. Функция F непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, $F(0) = F(1) = 1$. Вычисляя производную, находим

$$F'(\mu) = \frac{1}{\varphi_1^{\mu}(0)\varphi_2^{1-\mu}(0)} \left(\varphi_1(0) - \varphi_2(0) - (\mu\varphi_1(0) + (1-\mu)\varphi_2(0)) \ln\frac{\varphi_1(0)}{\varphi_2(0)}\right), \ \mu \in [0, 1]. \tag{21}$$

Имеем $F'(0) > 0$, $F'(1) < 0$. Поэтому существует единственное значение $\mu_* \in (0, 1)$ такое, что $F'(\mu_*) = 0$. Находим $F''(\mu_*) = (\varphi_2(0) - \varphi_1(0)) \ln\frac{\varphi_1(0)}{\varphi_2(0)} < 0$, т.е. в точке $\mu = \mu_*$ функция F принимает максимальное значение. Поэтому имеем $F(\mu) \geq 1$, $\mu \in [0, 1]$, что доказывает утверждение.

При $T > 1$ множество выживаемости $S_T(\lambda)$ не является выпуклым.

Л е м м а 4. *Множество выживаемости на отрезке* $[0, T]$, $0 < T \leq 1$, *масштабированного уравнения Хатчинсона (17) определяется формулой*

$$S_T(\lambda) = \left\{\varphi \in \Phi_\delta : \min_{\vartheta \in [-1, -1+T]} \int\limits_{-1}^{\vartheta} (1 - \varphi(s))\, ds \geq \lambda^{-1} \ln\frac{\delta}{\varphi(0)}\right\}, \ \lambda > 0. \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость следует из определения множества выживаемости и формулы (13) при $n = 1$.

Т е о р е м а 4. *Множество выживаемости на отрезке* $[0, M]$, M *— натуральное число, масштабированного уравнения Хатчинсона (17) определяется формулой*

$$S_M(\lambda) = \left\{\varphi \in \Phi_\delta : \min_{\vartheta \in [-1, 0]} \int\limits_{-1}^{\vartheta} (1 - N_{m-1}(s, \varphi))\, ds \geq \lambda^{-1} \ln\frac{\delta}{N_{m-1}(0, \varphi)}, \ m = \overline{1, M}\right\}, \ \lambda > 0. \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из определения множества выживаемости и формул (13).

Из теоремы 4 следует, что с увеличением числа M множество выживаемости сужается.

Л е м м а 5.*Множество выживаемости на отрезке* $[0, T]$, $0 < T \leq 1$, *масштабированного уравнения Хатчинсона (17) содержит множество*

$$\left\{ \varphi \in \Phi_\delta^* : \int\limits_{-1}^{\vartheta_*} (1 - \varphi(s))\, ds \geq \lambda^{-1} \ln \frac{\delta}{\varphi(0)},\ \vartheta_* \in E_*^-(\varphi) \bigcap [-1, -1+T] \right\},\ \lambda > 0. \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость следует из леммы 2.

Т е о р е м а 5.*Множество выживаемости на отрезке* $[0, M]$, M *— натуральное число, масштабированного уравнения Хатчинсона (17) содержит множество*

$$\left\{ \varphi \in \Phi_\delta^* : \int\limits_{-1}^{\vartheta_{*m}} (1 - N_{m-1}(s, \varphi))\, ds \geq \lambda^{-1} \ln \frac{\delta}{N_{m-1}(0, \varphi)},\ \vartheta_{*m} \in E_*^-(N_{m-1}(\cdot, \varphi)),\ m = \overline{1, M} \right\},\ \lambda > 0. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость следует из теоремы 3.

При построении множеств (24) и (25) множество начальных функций Φ_δ заменялось на Φ_δ^*. Если в качестве множеств начальных функций выбрать Φ_δ^K, $K \geq 1$, то формулы (24), (25) определят множества $S_T^K(\lambda)$, $0 < T \leq 1$, $S_M^K(\lambda)$, $M \geq 1$, $K \geq 1$, которые можно использовать при аппроксимации множеств выживаемости $S_T(\lambda)$, $0 < T \leq 1$, и $S_M(\lambda)$, $M \geq 1$, соответственно.

6 Заключение

Проблема выживаемости видов имеет важное значение в виду постоянного изменения экологических условий их существования. Максимальное множество выживаемости популяционной модели Хатчинсона принадлежит бесконечномерному пространству непрерывных функций и имеет сложную геометрию. Оно задается системой операторных неравенств. Применение численных методов при построении множества выживаемости связано с использованием конечномерных аппроксимаций. Один из возможных аппроксимативных подходов к задаче численного построения множества выживаемости предложен в настоящей работе.

Список литературы

[1] V. Volterra *Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie.* Paris, Gauthiers-Villars, 1931. = В. Вольтерра *Математическая теория борьбы за существование.* Москва, Наука, 1976.

[2] Yu. M. Svirezhev, D.O. Logofet. *Stability of Biological Communities.* Moscow, Mir, 1983. = Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет. *Устойчивость биологических сообществ.* Москва, Наука, 1978.

[3] A. D. Khokhlov. Conditions of the survival of population in Nicholson's models with delay. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika*, (3):29-32, 2010. (in Russian) = А. Д. Хохлов. Условия выживаемости популяции в моделях Николсона с запаздыванием. *Вестник Южно-Уральского государственного Университета. Серия: Математика. Механика. Физика*, (3):29-32, 2010.

[4] J. P. Aubin. *Viability theory.* Boston, Birkhauser, 1991.

[5] V. A. Vladimirov, Yu. L. Vorob'jev, S. A. Kaschenko et al. *Risk management: Risk. Sustainable development. Synergetics.* Moscow, Nauka, 2000. (in Russian) = В .А. Владимиров, Ю. Л. Воробьев, С. А. Кащенко и др. *Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика.* Москва, Наука, 2000.

[6] H. Foerster Some remarks on changing populations. *Kinetics Cellular Proliferation*, 382(7): 382-407, 1959.

[7] E. L. Tonkov. Dynamic survival problems. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, (4):138-148, 1997. (in Russian) = Е. Л. Тонков. Динамические задачи выживания. *Вестник Пермского государственного технического университета*, (4):138-148, 1997.

[8] V. N. Baranov. Problem of viability for the system restriction with time lag. *Izvestia Instituta matematiki i informatiki. UdSU: Izhevsk*, 2(28):3-102, 2003. (in Russian) = В. Н. Баранов. Задачи выживания для систем с последействием. *Известия института математики и информатики. УдГУ: Ижевск*, 2(28):3-102, 2003.

[9] A. B. Kurzhanskii, T. F. Filippova. Description of the pencil of viable trajectories. *Differentsial'nye Uravneniya*, 23(8):1303-1315, 1987. (in Russian) = А. Б. Куржанский, Т. Ф. Филиппова. Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы. *Дифференцальные уравнения*, 23(8):1303-1315, 1987.

[10] T. F. Filippova. Survival problem for differential inclusions. *The author's abstract of the thesis of the Doctor of Physical and Mathematical Sciences*, 1992. (in Russian) = Т. Ф. Филиппова. Задачи выживаемости для дифференциальных включений. *Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук*,1992.

[11] Kh. G. Guseinov, A. I. Subbotin, V. N. Ushakov. Derivatives of multivalued mappings and their applications in game control problems. *Problems of Control and Information Theory*, 14(3):1-14, 1985. (in Russian) = Х. Г. Гусейнов, А. И. Субботин, В. Н. Ушаков. Производные многозначных отображений и их применение в игровых задачах управления. *Проблемы управления и теории информации)*, 14(3):1-14, 1985.

[12] A. A. Neznakhin, V. N. Ushakov. The grid method of approximate construction of the survival kernel for differential inclusion. *Distributed systems: optimization and applications in the economy and environmental sciences. Proceedings of the International Conference*, Ekaterinburg, Ural Branch of RAS:156-158, 2000. (in Russian) = А. А. Незнахин, В. Н. Ушаков. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения. *Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде. Сборник докладов Международародной конференции*, Екатеринбург, УрО РАН:156-158, 2000.

[13] G. E. Hutchinson. Circular causal systems in ecology. *Annals of the New York Academy Scitnces*, 50:221-246, 1948.

[14] S. Kakutati, L. Marcus. On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (A - By(t-\tau)y(t)$. *Annals of Mathematics Studies*, 41:1-18, 1958.

[15] G. Jones. On the nonlinear differential difference equation $f'(x) = -\alpha f(x-1)[1 + f(x)]$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 4:440-469, 1962.

[16] G. Jones. The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)[1 + f(x)]$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 5:435-450, 1962.

[17] A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rosov. The theory of relaxation oscillations for Hutchinsons euation. *Mathematics*, 202(6):829–858, 2011. = А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона. *Матемематический сборник*, 202(6):51-82, 2011.

[18] L. F. Shampine, I. Gladwell, S. Thompson. *Solving ODEs with MATLAB*. Cambridge, University Press, 2003. = Л. Ф. Шампайн, И. Гладвел, С. Томпсон. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB*. Санкт-Петербург, Лань, 2009.

[19] R. Bellman, K. L. Cooke. *Differential-difference equations*. New York-London, Academic Press, 1963. = Р. Беллман, К. Л. Кук. *Дифференциально-разностные уравнения*. Москва, Мир, 1967.

[20] Jack Hale *Theory of functional differential equations*. New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1977. = Дж. Хейл. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*. Москва, Мир, 1984.

The problem of survival in the population models

Yurii F. Dolgii
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. Term survival solutions introduced for the population dynamical systems. We obtain conditions for survival solutions in Hutchinson population model. We investigate the set of survival population model.

Keywords: dynamic models with aftereffect, models of population, the survival of the population, the set of survival.