Аналитическое решение с гистерезисом положения звуковой линии в модели Линя-Рейсснера-Тзяня

К.В. Курмаева
kurmaevakv@yandex.ru

Филиал УрГУПС в г. Нижнем Тагиле (Нижний Тагил)

Аннотация

В работе рассмотрена проблема изучения явления гистерезиса в различных моделях аэродинамики. Дан обзор публикаций, на основе которого сформулирована задача поиска гистерезиса в модели нестационарных трансзвуковых течений газа, описываемых уравнением Линя-Рейсснера-Тзяня. Предложено аналитическое решение этого уравнения, гистерезис в котором проявляется в том, что линия перехода через скорость звука не возвращается в исходное положение при возвращении условий обтекания к исходным.

Ключевые слова: гистерезис; газовая динамика; звуковая линия; ряды.

Гистерезис (греч. $\upsilon\sigma\tau\varepsilon\varrho\eta\sigma\iota\varsigma$ — отстающий) — свойство систем (физических, биологических и т. д.), мгновенный отклик которых на приложенные к ним воздействия зависит в том числе и от их текущего состояния, а поведение системы на интервале времени во многом определяется её предысторией.

Исследование явления гистерезиса в газовой динамике и аэрофизике является одним из актуальных вопросов современной науки. Сама возможность такого явления в аэродинамике долгое время подвергалось сомнению. Следует отметить, что в большинстве исследований изучение гистерезиса проводится численными методами или в ходе проведения многочисленных экспериментов. Анализ научных работ показывает следующее. В работе [1] говорится о численных результатах возможности наличия гистерезиса смены режимов регулярного и нерегулярного отражения скачков в различные моменты прямого и обратного хода изменения параметров в угловых конфигурациях течений, образованных пересекающимися клиньями. Путем численных расчетов и экспериментальных исследований установлено [2], что переход между регулярным и маховским отражением ударных волн в стационарных высокоскоростных течениях может сопровождаться гистерезисом, который заключается в несовпадении углов прямого и обратного хода. В работе А.Е. Медведева, В.М. Фомина [3] проведено аналитическое исследование явления гистерезиса при отражении плоских ударных волн. Численно [4] установлено явление гистерезиса по типу отрыва, которое заключается в том, что при возрастании перепада давления на сопле переход от свободного отрыва к ограниченному происходит при больших значениях, чем обратный переход при снижении перепада давления. Численное и аналитическое решение [5] течения нелинейной вязкоупругой жидкости, характеризующееся одним тензорным внутренним параметром в плоском канале под действием постоянного перепада давления, показало, что его напорно-расходные характеристики имеют гистерезисный характер. Изучению наличия гистерезиса посвящено ряд работ в аэродинамической области. Так, в [6] изложены результаты

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

экспериментальных исследований множественного гистерезиса продольных аэродинамических характеристик модели самолет с прямым крылом большого удлинения при числе Рейнольдса $Re = 0.33 \cdot 10^6$, выяснено, при каких начальных значениях угла атаки и дальнейшем его увеличении или уменьшении наблюдается устойчивость внутренних ветвей гистерезиса. Использование математической модели, разработанной для описания гистерезисных функций [7] аэродинамических сил и моментов, зависящих как от угла атаки, так и от скорости его изменения, установлено, что появление гистерезиса при летных испытаниях спускаемого аппарата "Союз" на гиперзвуковом участке спуска обусловлено демпфированием. Наличию гистерезиса в плоском сопле посвящена работа Е.В. Мышенкова, Е.В. Мышенковой [8]. Здесь на режиме перерасширения обнаружено существование гистерезисных явлений течения в плоском симметричном и повернутом соплах, вызванные эффектом Коанда, а также взаимодействия пограничного слоя с внутрисопловым скачком на сверхзвуковых створках сопла. Обнаруженные гистерезисные явления дают при одних и тех же параметрах задачи расхождение до 4 процентов в коэффициенте тяги. Результаты численного моделирования сопоставляются с экспериментальными данными и результатами расчетов по модели Секундова.

Эти результаты приводят к постановке задачи исследования газодинамичесих моделей нестационарных течений, достаточно простых, но допускающих явление гистерезиса. В настоящей статье гистерезис будем рассматривать в контексте перевода внешних условий в начальное положение, при котором система в начальное состояние возвращается не полностью. В чём смысл проблемы для трансзвуковых течений газа?

Может ли такое быть, что если самолёт летит с околозвуковой скоростью, потом ускоряется, а потом замедляется (или, наоборот - замедляется, а потом ускоряется) и снова летит с прежней скоростью, то режим обтекания его воздухом может не вернуться к исходному. В частности, это может быть заметно по тому, что положение линии (поверхности) перехода через скорость звука может измениться. Это важный момент в области управляемости и предсказуемости режима обтекания.

Возникает вопрос - можно ли обнаружить аналитически этот феномен? Для ответа на сформулированный вопрос рассмотрим упрощенную модель Линя-Рейсснера-Тзяня для потенциала $u(x, y, t)$ в плоском случае (не сопло и не фюзеляж, а крыло или просто канал, плоскопараллельное сопло), описывающую нестационарное течение газа [9]

$$u_{yy} = u_x u_{xx} + 2u_{xt} \tag{1}$$

– уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка относительно малой добавки потенциала u скорости к потенциалу однородного плоского околозвукового потока. Это означает, что если скорость набегающего однородного потока имеет вид

$$U = 1 + v(t), \tag{2}$$

то

$$v(t) = u_x(x, y, t). \tag{3}$$

В уравнении (1) индексы означают соответствующие частные производные, так, u_{xt} означает смешанную производную от u по x и t, x – продольная координата (вдоль оси x направлен поток газа слева направо, направление оси абсцисс совпадает с направлением движения основного однородного околозвукового потока, это ось симметрии крыла или канала), y – поперечная координата, t – временная координата. Тело, если оно есть, считаем неподвижным.

С помощью логарифмических рядов построено решение (1), описывающее течение в ближней области в случае стационарного [10] и нестационарного [11] трансзвукового течения. Применение методики построения аналитического решения с применением логарифмических рядов также позволило решить задачу локального построения решений уравнения потенциала скорости стационарного движения газа [12].

Построим формальное аналитическое решение уравнения (1), с целью аналитического обоснования возможности наличия гистерезиса, которое рассмотрим в рамках обратной задачи теории сопла [13]. Для этого запишем потенциал $u(x, y, t)$ в виде ряда по четным степеням поперечной переменной y

$$u(x, y, t) = a(x, t) + b(x, t)y^2 + c(x, t)y^4 + d(x, t)y^6 + ... \tag{4}$$

Зная аналитическое представление $u(x, y, t)$, найдем каждую составляющую уравнения (1), продифференцировав (4)

$$u_x(x, y, t) = a_x(x, t) + b_x(x, t)y^2 + c_x(x, t)y^4 + d_x(x, t)y^6 + ..., \tag{5}$$

$$u_{xt}(x,y,t) = a_{xt}(x,t) + b_{xt}(x,t)y^2 + c_{xt}(x,t)y^4 + d_{xt}(x,t)y^6 + ..., \tag{6}$$

$$u_{xx}(x,y,t) = a_{xx}(x,t) + b_{xx}(x,t)y^2 + c_{xx}(x,t)y^4 + d_{xx}(x,t)y^6 + ..., \tag{7}$$

$$u_{yy}(x,y,t) = 2b(x,t) + 12c(x,t)y^2 + 30d(x,t)y^4 + ... \tag{8}$$

Учитывая (5), на оси $y = 0$ запишем условие в набегающем потоке при $x \to -\infty$ (на левом краю)

$$u_x(x,0,t) = a_x(x,t). \tag{9}$$

Для наличия гистерезиса в рассматриваемой модели необходимо, чтобы уравнение звуковой линии

$$u_x(x,0,t) = a_x(x,t) = 0 \tag{10}$$

имело разное поведение на концах интервала при $t \to \pm\infty$. В трансзвуковом приближении классический результат Л.В. Овсянникова о том, что в трансзвуковом стационарном непрерывном течении через точку уплощения проходит звуковая линия, которая является прямой и на ней имеется особенность на конечном расстоянии от центральной линии течения обобщен в случае осевой симметрии [14].

Проверим выполнение условия (10). Для этого найденные производные (5)-(8) подставим в уравнение (1), перемножим ряды, приведем и выпишем подобные слагаемые при одинаковых степенях y, получим цепочку соотношений относительно функций $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$ – коэффициентов ряда (4).

При y^0 имеем

$$2b(x,t) = a_x(x,t)a_{xx}(x,t) + 2a_{xt}(x,t). \tag{11}$$

При y^2 имеем

$$12c(x,t) = b_x(x,t)a_{xx}(x,t) + b_{xx}(x,t)a_x(x,t) + 2b_{xt}(x,t). \tag{12}$$

При y^4 имеем

$$30d(x,t) = b_x(x,t)b_{xx}(x,t) + a_{xx}(x,t)c_x(x,t) + a_x(x,t)c_{xx}(x,t) + 2c_{xt}(x,t). \tag{13}$$

Выполнение условия (3) накладывает следующие ограничения на слагаемые (5) при $x \to -\infty$

$$a_x(x,t) = v(t), \tag{14}$$

$$b_x(x,t) \to 0, \tag{15}$$

$$c_x(x,t) \to 0, ... \tag{16}$$

т.е. все слагаемые ряда (5) являются нулевыми, за исключением первого.

Положим в качестве

$$a_x(x,t) = v(t) + A(t)e^x, \tag{17}$$

где

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{t^2+1}, \tag{18}$$

$$A(t) = \arctan t + \pi. \tag{19}$$

Замечаем, что при противоположных значениях временной координаты t значения функции $A(t)$ различно, т.е.

$$\lim_{t\to-\infty} A(t) = A_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{t\to+\infty} A(t) = A_2 = \frac{3\pi}{2}. \tag{20}$$

С учетом функции $a_x(x,t)$ (17) уравнение звуковой линии (10) примет вид

$$v(t) + A(t)e^{x_0(t)} = 0, \tag{21}$$

где $x_0(t)$ – абсцисса звуковой линии.

Из последнего равенства имеем

$$f(t) = e^{x_0(t)} = -\frac{v(t)}{A(t)} > 0. \tag{22}$$

Замечаем, что при указанном задании функции (17-19) условие (10) будет выполнено, так как

$$\lim_{t\to-\infty} e^{x_0(t)} = \lim_{t\to-\infty} f(t) = -\frac{v_0}{A_1},$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{x_0(t)} = \lim_{t\to+\infty} f(t) = -\frac{v_0}{A_2}, \tag{23}$$

т.е. уравнение звуковой линии имеет разные решения на противоположных концах интервала изменения временной координаты $t \to \pm\infty$.

Кроме этого, задание функции $a_x(x,t)$ в виде (17) обеспечивает выполнение условия (14).

Проверим выполнение ограничений (15), (16). Для этого продифференцируем по x функцию $b(x,t)$ (11)

$$2b_x(x,t) = a_{xx}(x,t)a_{xx}(x,t) + a_x(x,t)a_{xxx}(x,t) + 2a_{xtx}(x,t) =$$

$$= a_{xx}^2(x,t) + a_x(x,t)a_{xxx}(x,t) + 2a_{xtx}(x,t). \tag{24}$$

В (24) подставим соответствующие производные функции $a_x(x,t)$

$$a_{xx}(x,t) = A(t)e^x,$$

$$a_{xxx}(x,t) = A(t)e^x,$$

$$a_{xtx}(x,t) = A_t(t)e^x,$$

и получим, что при $x \to -\infty$ условие (15) выполнено.

В правой части уравнения (12), задающим функцию $c(x,t)$, каждое слагаемое содержит производную по переменной x функции $b(x,t)$, для которой доказано выполнение условия (15) при $x \to -\infty$. Следовательно, функция $c(x,t) = 0$ при $x \to -\infty$, значит, выполнение условия (16) доказано. Аналогично рассуждая, получим, что функция (5) содержит нулевые слагаемые, за исключением первого слагаемого.

Задав первый коэффицент ряда (5) в виде (17), продифференцируем его по переменной x и по переменной t, получим

$$a_{xx}(x,t) = A(t)e^x. \tag{25}$$

$$a_{xt}(x,t) = v_t(t) + A_t(t)e^x. \tag{26}$$

Далее, можно определить второй коэффициент ряда (5) – функцию $b(x,t)$. Для этого в соотношение (11) подставим (17), (25) и (26), получим

$$2b(x,t) = \left[v(t) + A(t)e^x\right] A(t)e^x + 2\left[v_t(t) + A_t(t)e^x\right], \tag{27}$$

где функции $v(t)$ и $A(t)$ определяются выражениями (18) и (19).

Таким образом, в модели Линя-Рейсснера-Тзяня (1) при условии набегающего потока при $x \to -\infty$ (на левом краю) (9) получено,что уравнение звуковой линии имеет разные решения при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$, что свидетельствует о наличии гистерезиса в нестационарном неоднородном потоке в плоском случае. Кроме этого, проведён анализ коэффициентов ряда (4), описывающего потенциал околозвукового потока. Согласно расчетам, их функциональное представление определяется заданием свободного коэффициента $a(x,t)$. Следовательно, можно сделать вывод о том, что линия перехода через скорость звука может не возвращаться в исходное положение при возвращении условий в набегающем потоке к исходным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16-01-00401_A).

Список литературы

[1] Ju.P. Goonko, A.N. Kudrjavcev. Numerical modelling of free interaction of shock waves in corner flows. *Thermophysics and Aeromechanics*, 13(2):239–256, 2006. = Ю.П. Гунько, А.Н. Кудрявцев. Thermophysics and Aeromechanics. *Теплофизика и аэромеханика*, 13(2):239–256, 2006.

[2] M.S. Ivanov, G.P. Klemenko, A.N. Kudrjavcev, S.B. Nikiforov, A.A. Pavlov, V.M. Fomin, A.M. Haritonov, D.V. Hotjanovskij. Novye chislennye i jeksperimental'nye rezul'taty po probleme perehoda mezhdu reguljarnym i mahovskim otrazheniem udarnyh voln. *Tezisy dokladov "Sovremennye problemy prikladnoj matematiki i mehaniki: teorija, jeksperiment i praktika"*. Mezhdunarodnaja konferencija, posvjashhennaja 80-letiju akademika N.N.Janenko. Novosibirsk, Akademgorodok, 24 - 29 ijunja 2001 goda.(in Russian) = М.С. Иванов, Г.П. Клеменко, А.Н. Кудрявцев, С.Б. Никифоров, А.А. Павлов, В.М. Фомин, А.М. Харитонов, Д.В. Хотяновский. Новые численные и экспериментальные результаты по проблеме перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн. *Тезисы докладов "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика"*. Международная конференция, посвященная 80-летию академика Н.Н.Яненко. Новосибирск, Академгородок, 24 - 29 июня 2001 года.

[3] A.E. Medvedev, V.M. Fomin. Analiticheskoe issledovanie javlenija gisterezisa pri otrazhenii ploskih udarnyh voln. *Dinamika sploshnoj sredy: sb. nauch. tr. Matematicheskie problemy mehaniki sploshnyh sred./ Ros. akad. nauk. Sib. otd-nie, In-t gidrodinamiki*, (114):122–126, 1999. (in Russian) = А.Е. Медведев, В.М. Фомин. Аналитическое исследование явления гистерезиса при отражении плоских ударных волн. *Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. Математические проблемы механики сплошных сред./ Рос. акад. наук. Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики*, (114):122–126, 1999.

[4] И.Э. Иванов. Numerical investigation of the separation of turbulent flows in a supersonic nozzle. *Vestnik of Lobachevsky state university of Nizhni Novgorod* Nizhnij Novgorod, 4(3):801–803, 2011. = И.Э. Иванов. Численное исследование отрывных турбулентных течений в сверхзвуковых течениях. *Механика жидкости и газа. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* Нижний Новгород, 4(3):801–803, 2011.

[5] Ju.L. Kuznecova, O.I. Skul'skij, G.V. Pyshnograj. Presure driven flow of a nonlinear viscoelastic fluid in a plane channel. *Computational Continuum Mechanics*, 3(2):55–69, 2011. = Ю.Л. Кузнецова, О.И. Скульский, Г.В. Пышнограй. Течение нелинейной упруговязкой жидкости в плоском канале под действием заданного градиента давления. *Вычислительная механика сплошных сред*, 3(2):55–69, 2011.

[6] I.V. Kolin, V.K. Svjatoduh, T.I. Trifonov, D.V. Shuhovcov. Gisterezis v ajerodinamicheskih harakteristikah modeli samolet s prjamym krylom bol'shogo udlinenija. *Journal of Applied Physics*, 76(4):136–139, 2006. (in Russian) = И.В. Колин, В.К. Святодух, Т.И. Трифонов, Д.В. Шуховцов. Гистерезис в аэродинамических характеристиках модели самолет с прямым крылом большого удлинения. *Журнал технической физики*, 76(4):136–139, 2006.

[7] O.N. Hatunceva. Classification of hysteresis functions. Theoretical models and description methods. *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics. Nauchno-issledovatel'skij institut mehaniki MGU im. M.V. Lomonosova*, 13(1):1–23, 2012. (in Russian) = О.Н. Хатунцева. Классификация гистерезисных функций. Теоретические модели и методы описания. *Физико-химическая кинетика в газовой динамике. Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова*, 13(1):1–23, 2012.

[8] E.V. Myshenkov, E.V. Myshenkova. Hysteresis Phenomena in a Plane Rotatable Nozzle. *Fluid Dynamics*, (4):175–187, 2010. = Е.В. Мышенков, Е.В. Мышенкова. Гистерезисные явления в плоском поворотном сопле. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, (4):175–187, 2010.

[9] C.C. Lin, E. Reissner, H.S. Tsein. On two - dimensional non - steady motion of a slender body in a compressible fluid. *J. Mafhematics and Physics*, 27(3):220–231, 1948.

[10] S.S. Titov. Ob okolozvukovom obtekanii gazom tonkih tel vrashhenija. *Analiticheskie metody mehaniki sploshnoj sredy.* Sverdlovsk: IMM UNC AN SSSR, (33):65–72, 1979. (in Russian) = С.С. Титов. Об

околозвуковом обтекании газом тонких тел вращения. *Аналитические методы механики сплошной среды.* Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, (33):65–72, 1979.

[11] К.В. Курмаева, С.С. Титов. Analiticheskoe postroenie blizhnego polja transzvukovogo techenija okolo tonkogo tela vrashhenija. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*, 8(3):93–101, 2005. (in Russian) = К.В. Курмаева, С.С. Титов. Аналитическое построение ближнего поля трансзвукового течения около тонкого тела вращения. *Сибирский журнал индустриальной математики*, 8(3):93–101, 2005.

[12] K.V. Kurmaeva, S.S. Titov. Extension of Ovsyannikov's analytical solutions to transonic flows. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 46(6):780–790, 2005. = К.В. Курмаева, С.С. Титов. Обобщение аналитических решений Л.В. Овсянникова для трансзвуковых течений. *Прикладная механика и техническая физика*, 46(6):14–25, 2005.

[13] U.G. Pirumov. *Obratnaja zadacha teorii sopla.* Moscow, Mashinostroenie, 1988. (in Russian) = У.Г. Пирумов. *Обратная задача теории сопла.* Москва, Машиностроение, 1988.

[14] K.V. Kurmaeva, S.S. Titov. Prjamaja zvukovaja linija v obratnoj zadache teorii sopla. *Trudy instituta matematiki i mehaniki UrO RAN*, 14(1):81–97, 2008. (in Russian) = К.В. Курмаева, С.С. Титов. Прямая звуковая линия в обратной задаче теории сопла. *Труды института математики и механики УрО РАН*, 14(1):81–97, 2008.

Analytical solution with hysteresis of the position of the sound lines in the model of the Lin-Reissner-Tsein

Kristina V. Kurmaeva
Branch of Ural State University of Railway Transport in Nizhny Tagil (Nizhny Tagil)

Abstract. The paper considers the problem of studying the phenomenon of hysteresis in various models of aerodynamics. An overview of publications, which formulated the task of finding the hysteresis in the model of nonstationary transonic gas flows described by the equation of the Lin-Reissner-Tsana. The analytical solution of this equation, hysteresis which manifests itself in the fact that the line of transition through the velocity of sound is not returned to its original position when returning flow conditions to the original.

Keywords: hysteresis, gas dynamics, sound, series.