

Слоистые градиентные стационарные течения вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости

Е.Ю. Просвиряков
evgen_pros@mail.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (Екатеринбург)
Институт машиноведения УрО РАН (Екатеринбург)

Аннотация

Найдено точное решение, описывающее стационарное течение завихренной вязкой несжимаемой жидкости. Приведенное решение системы Навье-Стокса имеет характерную особенность при описании движущейся жидкости — справедливо при учете не только вязких сил, но и сил инерции. Учет сил инерции приводит к появлению застойных точек в слое жидкости, противотечений и существованию толщин слоя, при которых касательные напряжения на нижней границе обращаются в нуль. Показана роль давления в формировании числа застойных точек в слое жидкости.

Ключевые слова: точное решение; противотечение; течение Пуазейля; слоистое течение; застойная точка.

1 Введение

При изучении крупномасштабных течений в изотермических уравнениях Навье-Стокса и их конвективных аналогах используется гидростатическое приближение. Применение «наивных» уравнений океанических течений является спорным ввиду их заведомой приближенности. Использование уравнений термодиффузии при моделировании течений жидкости в океане основано на удержании вертикальной скорости во всех уравнениях движения кроме уравнения сохранения импульсов на ось, относительно которой предлагается использовать гидростатическое приближение. Применение слоистых течений для описания крупномасштабных течений затруднительно, поскольку для неизотермического океана система Обербека-Буссинеска является переопределенной. Очевидно, что выходом из этой ситуации может служить интегрирование полной системы уравнений Навье-Стокса, но это не облегчит, если не усложнит описание движения жидкости на первых порах. Наиболее перспективным представляется путь, при котором будут найдены точные решения для нелинейных уравнений движения жидкости, описывающих слоистые течения, а затем будет проведено сравнение с классическими («наивными») уравнениями теории океана и с полной системой уравнений Навье-Стокса. Для этой цели можно использовать известный класс точных решений, в котором скорости линейны по части координат [1, 2, 3, 4, 5, 6].

К первым точным решениям указанного класса движений относятся классические течения Куэтта [7] и Экмана [8]. Течение Куэтта [7] описывает однонаправленное слоистое течение вязкой несжимаемой жидко-

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at <http://ceur-ws.org>

сти при отсутствии вращения и постоянном давлении. В то время, как решение Экмана [8] справедливо для описания противотечений вращающихся масс жидкости. Взяв за основу эти два классических точных решения, Стоммел [9] и Чарни [10] предложили математические модели, которые описывали бы экваториальные противотечения. Как было показано Стоммелом [9], использование линейных определяющих соотношений (линеаризованных уравнений Навье-Стокса) не пригодно для описания движений жидкости на экваторе. Точное решение Чарни [10], качественно описывающее нелинейные эффекты генерации противотечений, имеет очень узкую область применимости. Этот недостаток решения Чарни можно объяснить сильным сглаживанием нелинейных слагаемых уравнений Навье-Стокса и отсутствием вертикальной компоненты завихренности в модельном течении. Косвенным подтверждением этих результатов можно указать непригодность использования точного решения Куэтта для описания противотечений. Противотечения в слое жидкости для течения Куэтта возможны при учете скольжения жидкости на нижней границе. В этом случае противотечения могут наблюдаться только для несжимаемых реологических сред.

В статьях [11, 12, 13] были предложены математические модели, которые посредством точных решений уравнений Навье-Стокса объясняют генерацию противотечений в жидкости и усиление скоростей по сравнению с заданными граничными возмущениями. Характерной особенностью полученных результатов в [11, 12, 13] является демонстрация существования противотечений в слоистых течениях при постоянном давлении. Было показано, что существование застойных точек и противотечений возможно благодаря наличию вертикального вихря в жидкости. Далее интерес представляют слоистые течения, у которых давление будет влиять на количество застойных точек. В данной статье дается ответ на этот вопрос в рамках одного точного решения уравнений Навье-Стокса.

2 Постановка задачи

Уравнения Навье-Стокса, описывающие слоистые течения вязкой несжимаемой жидкости, в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ записываются следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $(V_x; V_y; 0)$ — вектор скорости слоистого течения жидкости, $P = \frac{p}{\rho}$ — давление p , деленное на постоянную плотность жидкости ρ ; ν — коэффициент кинематической (молекулярной) вязкости.

Система нелинейных уравнений в частных производных (1) является переопределенной, поскольку для определения трех неизвестных функций V_x , V_y , P в ней содержится четыре уравнения. Первые три уравнения в (1) определяют баланс сил инерции, градиента приведенного давления P , имеющего размерность энергии, и внутреннего трения в жидкости. Отметим, что для уравнения импульсов, спроецированного на ось Oz , выполняется условие гидростатического равновесия.

Для системы (1) при постоянном давлении ($P = const$) в статье [11]

$$\begin{aligned} V_x &= U(z, t) + u_1(z, t)x + u_2(z, t)y, \\ V_y &= V(z, t) + v_1(z, t)x + v_2(z, t)y. \end{aligned} \quad (2)$$

Поле скоростей (2) линейно по координатам x и y , которые далее будем называть горизонтальными (продольными). Соответственно координату z будем называть вертикальной (поперечной).

Ограничимся далее исследованием стационарного точного решения специального вида (2) системы (1). Рассмотрим следующую структуру поля скоростей:

$$V_x = U(z) + u_2(z)y,$$

$$V_y = V(z). \quad (3)$$

Очевидно, что при описании стационарных движений вязкой несжимаемой жидкости неизвестные функции U , V , u_2 определяются только вертикальной координатой. В дальнейшем аргумент z , от которого зависят скорости U , V и градиент u_2 скорости V_x указываться не будет.

Решение (3) будем использовать при описании движения вязкой несжимаемой в бесконечно протяженном слое в горизонтальном направлении, определяемом декартовым произведением множеств

$$(x; y; z) = (-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty) \times [0; h].$$

Уравнения $z = 0$ и $z = h$ определяют границы слоя в поперечном направлении, следовательно, h — толщина слоя жидкости.

Подставим выражения (3) в уравнения (1), получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} Vu_2 &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Исследуя структуру последней системы уравнений, получим, что давление описывается линейной формой

$$P = P_0(z) + xP_1 + yP_2 = S + g(h - z) + xP_1 + yP_2. \quad (5)$$

В выражении (5) S , P_1 и P_2 — постоянные величины; g — ускорение свободного падения; h — толщина слоя.

Подставляя в систему (4) выражение, описывающее давление (5), получим, приравнявая коэффициенты при одинаковой степени координаты y , уравнения для определения гидродинамических полей:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2}{dz^2} &= 0, \quad \nu \frac{d^2 V}{dz^2} = P_2, \\ \nu \frac{d^2 U}{dz^2} &= Vu_2 + P_1. \end{aligned} \quad (6)$$

3 Вычисление точного решения

Последовательное интегрирование уравнений (6) позволяет получить общее решение этой системы

$$\begin{aligned} u_2 &= c_1 z + c_2, \quad V = P_2 \frac{z^2}{2\nu} + c_3 z + c_4, \\ U &= \frac{1}{\nu} \left[c_1 P_2 \frac{z^5}{40\nu} + (2c_1 c_3 + c_2 P_2) \frac{z^4}{24} + (c_1 c_4 + c_2 c_3) \frac{z^3}{6} + c_2 c_4 \frac{z^2}{2} \right] + \frac{P_1}{\nu} \frac{z^2}{2} + c_5 z + c_6. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вычисления постоянных интегрирования c_i , где $i = \overline{1, 6}$, определяющих структуру решений (7), сформулируем граничные условия. На нижней границе, описываемой уравнением плоскости $z = 0$, выполняются условия прилипания:

$$V_x = V_y = 0,$$

которые из-за структуры класса (3) записываются следующим образом:

$$U = V = 0, \quad u = 0. \quad (8)$$

На верхней границе $z = h$ заданы скорости

$$V_x = W \cos \varphi + y\Omega, \quad V_y = W \sin \varphi,$$

что эквивалентно условиям

$$U = W \cos \varphi, \quad V = W \sin \varphi, \quad u = \Omega. \quad (9)$$

В (9) W — значение скорости (модуль вектора) жидкости на поверхности $z = h$ слоя жидкости, а угол φ — это направление этой скорости, относительно двумерной прямоугольной декартовой системы координат Oxy ; Ω — величина градиента скорости, совпадающего с точностью до знака со значением вертикальной компоненты завихренности на верхней границе слоя жидкости: $\Omega_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\Omega$.

Воспользовавшись значениями скоростей на границах (8) и (9), получим частное решение, описывающее течение вязкой несжимаемой жидкости, индуцируемое неоднородным распределением поля скоростей:

$$\begin{aligned} u &= \Omega \frac{z}{h}, \quad V = \frac{P_2 h^2}{2\nu} \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \left(W \sin \varphi - \frac{P_2 h^2}{2\nu}\right) \frac{z}{h}, \\ U &= \frac{P_2 \Omega h^4}{40\nu^2} \left(\frac{z}{h}\right)^5 + \left(\frac{\Omega W \sin \varphi h^2}{12\nu} - \frac{P_2 \Omega h^4}{24\nu^2}\right) \left(\frac{z}{h}\right)^4 + \frac{P_1 h^2}{2\nu} \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \\ &+ \left(W \cos \varphi - \frac{\Omega W \sin \varphi h^2}{12\nu} + \frac{P_2 \Omega h^4}{60\nu^2} - \frac{P_1 h^2}{2\nu}\right) \frac{z}{h}. \end{aligned} \quad (10)$$

4 Исследование и обсуждение свойств гидродинамических полей

При анализе движения жидкости из соображения подобия удобно записывать уравнения Навье-Стокса в безразмерном виде. При точном интегрировании уравнений движения можно приводить к безразмерному виду не только уравнения, но и решения. Далее будет реализован второй путь при анализе поля скоростей. Выражения (10) в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} V_Y &= \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}} Z^2 + \left(\sin \varphi - \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}}\right) Z, \\ U_X &= \frac{\delta^4 \text{GaRo}}{80} Z^5 + \left(\frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{24} - \frac{\delta^4 \text{GaRo}}{48}\right) Z^4 + a \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}} Z^2 + \\ &+ \left(\cos \varphi - \frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{24} + \frac{\delta^4 \text{GaRo}}{120} - a \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}}\right) Z + \frac{1}{2\text{Ro}} ZY. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\text{Re} = \frac{Wl}{\nu}$, $\text{Ga} = \frac{P_2 l^3}{\nu^2}$, $\text{Ro} = \frac{W}{2\Omega l} = \frac{\text{Re}}{\text{Ta}}$, $\text{Ta} = \frac{2\Omega l^2}{\nu}$ — число Рейнольдса, Галилея, Россби, модифицированное число Тейлора второго рода соответственно, $\delta = \frac{h}{l}$ — отношение характерных размеров; $a = \frac{P_1}{P_2}$ — отношение градиентов давления; $Z = \frac{z}{h}$, $X = \frac{x}{l}$, $Y = \frac{y}{l}$ — безразмерные координаты. Отметим, что приведение к безразмерной форме (11) решений (10) осуществлялось посредством нормировки скоростей на число W . Отметим, что при приведении решений (11) к безразмерному виду для горизонтальных координат используется конечный характерный масштаб. Это позволяет использовать формулы (11) для описания течения в замкнутых объемах, задавая на боковых границах $y = -l$ ($Y = -1$) и $y = l$ ($Y = 1$) условия проницаемости.

Рассмотрим для начала случай, когда $W = 0$, $\Omega = 0$ на плоскости $z = h$. В этом случае жидкость покоится на обеих границах и формулы (11) определяют комбинацию однонаправленных классических течений Пуазёйля:

$$V_x = \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2} Z^2 - \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2} Z = \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2} Z(Z-1), \quad V_y = \frac{a \delta^2 \text{Ga}}{2} Z^2 - \frac{a \delta^2 \text{Ga}}{2} Z = \frac{a \delta^2 \text{Ga}}{2} Z(Z-1).$$

Отметим, что для представления скоростей V_x и V_y в безразмерном виде, нужно в размерных выражениях (10) провести нормировку скоростей на число $\frac{\nu}{l}$. Очевидно, что при выполнении условий прилипания на обеих границах слоя, поле скоростей в жидкости не расслаивается, но достигает экстремального значения в середине слоя. Характер экстремума определяется знаком коэффициента, стоящего перед слагаемым

Z^2 . Иными словами, поскольку решения являются непрерывно дифференцируемыми функциями, в жидкости не существуют застойные (критические) точки, которые характеризуют наличие противотечений, а усиление скоростей может иметь место.

Аналогично можно получить комбинацию классических течений Куэтта, полагая $P_1 = P_2 = 0$, $\Omega = 0$ в формулах (10). Если в (11) потребовать равенства нулю Ga , a , или в решениях (10) положить $P_1 = P_2 = 0$, то имеем неоднородное течение Куэтта, изученное подробно в статьях [11, 12, 13]. В [11, 12, 13] было показано, что при $P_1 = P_2 = 0$ и отсутствии вращения в жидкости может существовать одна застойная точка. Данные решения могут описывать течения жидкости в экваториальной зоне океана. Точные решения (11) при $\text{Ga} = a$ позволяют уточнить механизм образования противотечений в жидкости. Они образуются из-за нелинейных эффектов в жидкости, которые проявляются при наличии неоднородного распределения скоростей (ветра) на одной из границ даже при постоянном давлении. Таким образом, градиентное течение не является основополагающим при объяснении противотечений в экваториальной зоне океана, но оно может влиять на количество застойных точек в потоке вязкой несжимаемой жидкости.

Исследуем далее количество нулей скоростей V_X и V_Y . Скорость V_Y может быть записана в виде:

$$V_Y = Z \left[\frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}} Z + \left(\sin \varphi - \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}} \right) \right].$$

Очевидно, что скорость V_Y может принимать только одно нулевое значение на области определения $Z \in [0; 1]$ в точке $Z = \frac{1}{2} - \frac{2\text{Re} \sin \varphi}{\delta^2 \text{Ga}}$.

Перейдем к исследованию скорости V_X . Однородное слагаемое U скорости V_X допускает мультипликативное представление:

$$U = Z \left[\frac{\delta^4 \text{GaRo}}{80} Z^4 + \left(\frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{24} - \frac{\delta^4 \text{GaRo}}{48} \right) Z^3 + a \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}} Z + \left(\cos \varphi - \frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{24} + \frac{\delta^4 \text{GaRo}}{120} - a \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}} \right) \right] = Z f(Z) = Z (AZ^4 - BZ^3 - CZ - D).$$

Знак минус перед коэффициентами A , B , C и D поставлен из технических соображений.

Исследование количества нулей функции f на отрезке $[0; 1]$ сведем к исследованию функционального уравнения $f_1 = f_2$:

$$AZ^4 - BZ^3 = CZ + D.$$

Здесь $f_1 = AZ^4 - BZ^3$ (кривая 4 на рис. 1), $f_2 = CZ + D$ (прямые 1, 2, 3, 5, 6, 7 на рис. 1).

Очевидно, что при $A = B = 0$ справедливо уравнение

$$f = f_2 = -CZ - D = 0,$$

которое имеет не более чем одно решение (прямые 5, 6, на рис. 1). Только один корень может существовать у уравнения $f = 0$, если $A = 0$ или $B = 0$, когда соответственно имеем одно из уравнений

$$-BZ^3 = CZ + D,$$

или

$$AZ^4 = CZ + D.$$

В данных ситуациях уравнение $f = 0$ имеет только единственное решение, поскольку f_1 и f_2 являются монотонными функциями, которые могут пересекаться только в одной точке или не пересекаться вовсе (прямые 1, 2, 5, 6, 7 на рис. 1). Отметим, что при $C = 0$, уравнение $f = 0$ может иметь решения внутри отрезка $[0; 1]$ (прямая 3 на рис. 1). Прямые 3 и 6 (рис. 1) при фиксированном значении углового коэффициента C являются предельными прямыми. Если при параллельном переносе прямая принадлежит полосе, ограниченной прямыми 3 и 6 на рис. 1, то многочлен f имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$. Отметим, что прямая 6 (рис. 1) характеризует существование кратных корней $Z = 0$ и $Z = 1$.

Установим далее ограничения на коэффициенты A , B , C и D , при которых возможно два нуля у функции f (рис. 2). Функция f_1 имеет единственный корень $Z = \frac{B}{A}$ при $\frac{B}{A} \in (0; 1)$, что эквивалентно разбиению функции на два участка монотонности (кривая 4 на рис. 2). На одном участке функция f_1 монотонно

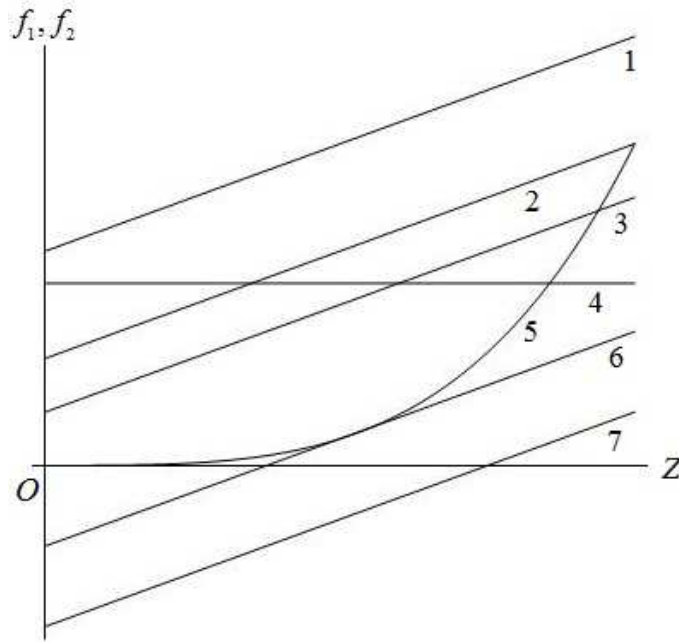


Рис. 1: Графики функций f_1 и f_2 , иллюстрирующие существование одного нуля у многочлена f

убывает, а на другом — возрастает. Это означает, что для любой комбинации $\frac{B}{A} \in (0; 1)$ существуют такие числа C и D , что уравнение $f = 0$ имеет 2 корня (прямые 3 и 5 на рис. 2). При $A > 0$ параметр C должен быть положительным, а при $A < 0$ — отрицательным. Следовательно, если числа A и C имеют разные знаки, то уравнение $f = 0$ имеет не более одного корня (прямая 1 на рис. 2). При $C = 0$ в этом случае у уравнения $f = 0$ всегда будет не больше одного корня (кривая 4 на рис. 2). Единственный корень будет существовать при касании прямой 6 кривой 4 (рис. 2).

Таким образом, многочлен f не может иметь на отрезке $[0; 1]$ три корня. Иными словами, задание неоднородного распределения скоростей и постоянных градиентов давления по толщине слоя жидкости, образует трехслойную структуру течения (рис. 3). В средней области II на рис. 3 скорость будет направлена в противоположную сторону относительно скоростей в областях I и III, примыкающих к границам слоя (рис. 3). Следовательно, учет градиентного течения позволяет использовать трехслойные модели океана (кусочно-непрерывно стратифицированы) при проведении теоретических исследований.

Исследование числа нулей у полиномиального поля скоростей можно проводить другими методами. Можно использовать теоремы о локализации нулей многочленов. Например, теорему Рауса-Гурвица и их аналоги, в том числе и частотные критерии. Для многочленов невысокой степени исследование проблемы Рауса-Гурвица можно заменить изучением спектральных свойств. Для существования одного корня функция должна принимать экстремальное значение хотя бы в одной точке, но это значение должно быть противоположного знака с граничной скоростью. Аналогичные рассуждения справедливы при существовании двух застойных точек. Для этого функция должна иметь хотя бы два экстремума со значениями противоположного знака.

Решения (11) определяют касательные напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{YZ} = \tau_{ZY} &= \frac{\delta^2 \text{Ga}}{\text{Re}} Z + \left(\sin \varphi - \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}} \right), \\ \tau_{XZ} = \tau_{ZX} &= \frac{\delta^4 \text{GaRo}}{16} Z^4 + \left(\frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{6} - \frac{\delta^4 \text{GaRo}}{12} \right) Z^3 + a \frac{2\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}} Z + \\ &+ \cos \varphi - \frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{24} + \frac{\delta^4 \text{GaRo}}{120} - a \frac{\delta^2 \text{Ga}}{2\text{Re}} + \frac{1}{2\text{Ro}} Y. \end{aligned}$$

Напряжение τ_{YZ} , очевидно, обращается в нуль не более, чем в одной точке на области определения. Однородное слагаемое τ_{XZ} может принимать нулевые значения на $[0; 1]$ не более чем в трех точках. Это можно

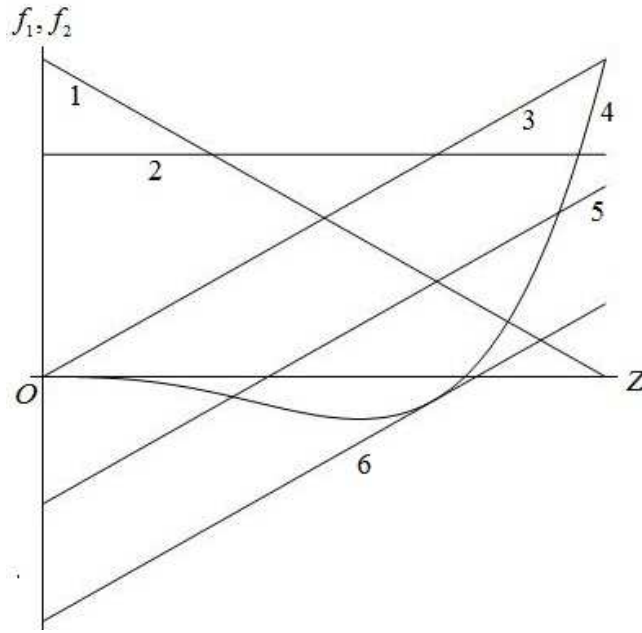


Рис. 2: Графики функций f_1 и f_2 , иллюстрирующие существование двух нулей у многочлена f

показать, используя алгоритм приведенный выше. Отсюда вытекает очень важное свойство обобщенного неоднородного течения Пуазейля, заключающееся в том, что существует такое значение $Z \in [0; 1]$, при котором обе компоненты тензора касательных напряжений равны нулю: $\tau_{YZ} = \tau_{XZ} = 0$. Иными словами, в жидкости существует такой слой, в котором сила трения тождественно равна нулю. В частности, трение может отсутствовать при $Z = 0$.

При исследовании структуры течения вязкой несжимаемой жидкости (11), получим, что движение во всем пространстве является вихревым. Вычисляя компоненты завихренности, получим

$$\begin{aligned}\Omega_x &= -\frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \\ \Omega_y &= \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} + y \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \Omega_z &= \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = -u.\end{aligned}$$

Ранее было показано, что $\Omega_z = -\frac{Z}{2\text{Ro}}$. Следовательно, завихренность не может принять нулевое значение. Таким образом, рассматриваемое движение жидкости не может локально и глобально вырождаться в потенциальное. Кроме того, решения (11) формируют спиральную структуру течения, для количественного описания которой используется спиральность поля скорости. Вклад в генерацию спиральности осуществляется вертикальной и горизонтальной компонентами движения. Ввиду этого, полученные решения будут полезны в качестве тестовых при исследовании свойств спиральной турбулентности и проведении численного моделирования течений диссипативной жидкости.

Метки ссылок должны начинаться с фамилии первого автора [?].

Список литературы

- [1] S. N. Aristov , A. D. Polyanin. New classes of exact solutions of Euler equations. *Doklady Physics*, 53(3): 166-171, 2008.
- [2] S. N. Aristov , E. Y. Prosviryakov. A New Class of Exact Solutions for Three-Dimensional Thermal Diffusion Equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 50(3): 286-293, 2016.

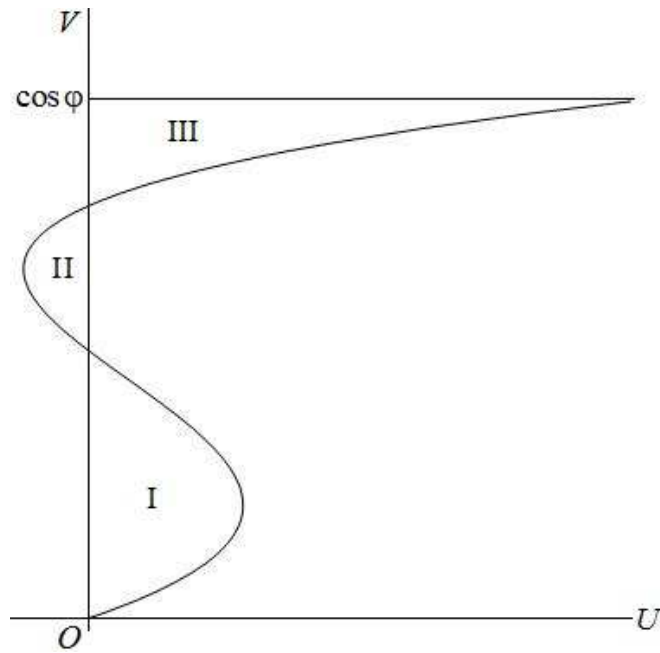


Рис. 3: Профиль скорости V_x при наличии двух застойных точек при фиксированном значении y

- [3] P. G. Drazin and N. Riley. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
- [4] V. V. Kuznetsov, V. V. Pukhnachev. A New Family of Exact Solutions of Navier-Stokes Equations. *Doklady Physics*, 54(3): 126-130, 2009.
- [5] C. C. Lin. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1: 391-395, 1958.
- [6] S. V. Meleshko. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations. *Nonlinear Dynamic*, 36(1): 47-68, 2004.
- [7] M. Couette. Études sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys.*, 21: 433-510, 1890.
- [8] V. W. Ekman. On the influence of the earth’s rotation on ocean currents. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 2: 1-5, 1905.
- [9] H. Stommel. Wind-drift near the equator. *Deep-Sea Res.*, 6(4): 298-302, 1960.
- [10] T. G. Charney. Nonlinear theory of a wind-driven homogenous layer near the equator. *Deep Sea Res.*, 6(4): 303-310, 1960.
- [11] S. N. Aristov , E. Y. Prosviryakov. Inhomogeneous Couette flow. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 10(2): 177-182, 2014. (In Russian)
- [12] S. N. Aristov , E. Y. Prosviryakov. Large-Scale Flows of Viscous Incompressible Vortical Fluid. *Russian Aeronautics*, 58(4): 413-418, 2015.
- [13] S. N. Aristov , E. Y. Prosviryakov. Unsteady Layered Vortical Fluid Flows. *Fluid Dynamics*, 51(2): 148-154, 2016.

Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid

Eugenii Yu. Prosviryakov

Institute of Engineering Science, The Ural Branch of Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg, Russia)
Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. An exact solution describing the flow of a vortical viscous incompressible fluid is derived. The solution of the Navier-Stokes equation possesses a characteristic feature in describing a fluid in motion, namely, it holds true when not only viscous but also inertia forces are taken into account. Taking the inertia forces into account leads to the appearance of stagnation points in a fluid layer and counterflows, as well as the existence of layer thicknesses at which the tangent stresses vanish on the lower boundary. Pressure role in the formation of stagnant fluid layer at the points is discussed.

Keywords: exact solution, countercurrent, Hagen-Poiseuille flow, laminar flow, stagnation point.