Специальные ряды для двумерных несжимаемых течений в модели Навье-Стокса

С.С. Титов[1]
stitov@usaaa.ru

К.В. Курмаева[2]
kurmaevakv@yandex.ru

1 – Уральский государственный университет путей сообщения (Екатеринбург)
2 – Филиал УрГУПС в г. Нижнем Тагиле (Нижний Тагил)

Аннотация

В современной гидродинамике решение уравнений Навье-Стокса является одной из актуальных задач. Научный интерес в исследовании этих уравнений имеет и теоретический, и практический аспект. Уравнения Навье-Стокса – это система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие движение вязкой ньютоновской жидкости. В статье рассматривается модель Навье-Стокса в форме Гельмгольца для двумерного несжимаемого течения, для которой предложена методика построения решения в виде формального ряда. Новизна предложенного материала заключается в формулировке и доказательстве сходимости построенного ряда как аналога теоремы Ковалевской.

Ключевые слова: Навье-Стокс; Ковалевская; сходимость; ряды.

1 Построение формального ряда

Запишем систему уравнений Навье-Стокса [1] на плоскости

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_t + uu_x + vu_y = -\frac{1}{\rho}p_x + \nu(u_{xx} + u_{yy}) + f \\ v_t + uv_x + vv_y = -\frac{1}{\rho}p_y + \nu(v_{xx} + v_{yy}) + g. \end{cases} \tag{1}$$

В (1) положим $\rho = 1$, $f = 0$, $g = 0$.

Дальнейшее изложение построим для двумерного уравнения Навье-Стокса (1) для несжимаемой жидкости в форме Гельмгольца [3]

$$\Delta\psi_t + \psi_y\Delta\psi_x - \psi_x\Delta\psi_y = \nu\Delta\Delta\psi. \tag{2}$$

Формализм рассматриваемого подхода к решению уравнения в форме Гельмгольца основан на его интерпретации как "квадратного уравнения" в некоторой абстрактной алгебре. Так слагаемые $\Delta\psi_t$ и $\nu\Delta\Delta\psi$ есть результат применения линейных дифференциальных операторов и искомой функции $\psi = \psi(x, y, t)$. Слагаемое с квадратичной нелинейностью $\psi_y\Delta\psi_x - \psi_x\Delta\psi_y$ можно интерпретировать как результат умножения

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

$\psi * \psi$ функции ψ на саму себя, то есть ее "квадрат" в некоторой ее алгебре (без требования обязательной коммутативности и ассоциативности умножения, обозначенного здесь $*$ "звездочкой"). Так, например, можно определить произведение $f * g$ функции f и g формулой

$$f * g = f_y \Delta g_x - f_x \Delta g_y.$$

При этом для любых трех функций u, v, w выполняются законы дистрибутивности

$$u * (v + w) = (u * v) + (u * w), \quad (u + v) * w = (u * w) + (v * w),$$

однако, коммутативности нет, в общем случае

$$f * g \neq g * f.$$

Так, например, может быть

$$\psi * \psi = 0, \quad \text{при } \psi \neq 0.$$

Рассмотрим общую ситуацию. Искомую функцию $\psi = \psi(x, y, t)$ представим в виде формального ряда [2]

$$\psi = \psi(x, y, t) = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} g_{klmn}(t) \xi^k \eta^l \sigma^m \delta^n, \tag{3}$$

где введены базовые функции

$$\xi = e^{ix} = S(x), \quad \eta = e^{-ix} = T(x), \quad \sigma = e^{iy} = S(y), \quad \delta = e^{-iy} = T(y).$$

Тогда ее производные ψ_x, ψ_y вычисляются (в области его равномерной абсолютной сходимости) как

$$\psi_x = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} i(k - l) g_{klmn}(t) \xi^k \eta^l \sigma^m \delta^n;$$

$$\psi_y = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} i(m - n) g_{klmn}(t) \xi^k \eta^l \sigma^m \delta^n,$$

поэтому

$$\Delta \psi = (\psi_{xx} + \psi_{yy}) = - \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} [(k - l)^2 + (m - n)^2] g_{klmn}(t) \xi^k \eta^l \sigma^m \delta^n =$$

$$= \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} (-s^2) g_{klmn}(t) \xi^k \eta^l \sigma^m \delta^n,$$

где обозначено

$$s^2 = [s(k, l, m, n)]^2 = (k - l)^2 + (m - n)^2,$$

отсюда

$$\Delta \Delta \psi = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} s^4 g_{klmn}(t) \xi^k \eta^l \sigma^m \delta^n,$$

а также

$$\Delta \psi_x = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} (-i)(k - l)[(k - l)^2 + (m - n)^2] g_{klmn}(t) \xi^k \eta^l \sigma^m \delta^n,$$

$$\Delta \psi_y = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} (-i)(m - n)[(k - l)^2 + (m - n)^2] g_{klmn}(t) \xi^k \eta^l \sigma^m \delta^n.$$

Поскольку любые два формальных степенных ряда $\psi^{[1]}$ и $\psi^{[2]}$, где

$$\psi^{[i]} = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} g^{[i]}_{klmn}(t)\xi^k\eta^l\sigma^m\delta^n, \quad \text{где } i \in \{1,2\},$$

перемножаются по правилу

$$\psi^{[1]} \cdot \psi^{[2]} = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k_1+k_2=k} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{m_1+m_2=m} \sum_{n_1+n_2=n} g^{[1]}_{k_1l_1m_1n_1}(t) \cdot g^{[2]}_{k_2l_2m_2n_2}(t)\xi^k\eta^l\sigma^m\delta^n \right\},$$

то ряд для квадратичной нелинейности примет вид

$$\psi_y\Delta\psi_x - \psi_x\Delta\psi_y = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} \xi^k\eta^l\sigma^m\delta^n \left[\sum_{k_1+k_2=k} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{m_1+m_2=m} \sum_{n_1+n_2=n} \right.$$

$$\left\{ i(m_1-n_1)g_{k_1l_1m_1n_1}(t) \cdot (-i)(k_2-l_2)\left[(k_2-l_2)^2+(m_2-n_2)^2\right] g_{k_2l_2m_2n_2}(t) - \right.$$

$$\left. \left. -i(k_1-l_1)g_{k_1l_1m_1n_1}(t) \cdot (-i)(m_2-n_2)\left[(k_2-l_2)^2+(m_2-n_2)^2\right] g_{k_2l_2m_2n_2}(t) \right\} \right] =$$

$$= \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} \left[\sum_{k_1+k_2=k} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{m_1+m_2=m} \sum_{n_1+n_2=n} \{(m_1-n_1)(k_2-l_2)-(k_1-l_1)(m_2-n_2)\} \times \right.$$

$$\left. \times \left[(k_2-l_2)^2+(m_2-n_2)^2\right] g_{k_1l_1m_1n_1}(t) \cdot g_{k_2l_2m_2n_2}(t) \right] \xi^k\eta^l\sigma^m\delta^n.$$

Здесь при фиксированных $k,l,m,n \geq 0$ имеем в индексах суммирования неравенства $0 \leq k_i \leq k$, $0 \leq l_i \leq l$, $0 \leq m_i \leq m$, $0 \leq n_i \leq n$, $i \in \{1,2\}$, и поэтому при $(k_i,l_i,m_i,n_i) = (k,l,m,n)$ имеем $(k_{3-i},l_{3-i},m_{3-i},n_{3-i}) = (0,0,0,0)$, однако в таком случае выражение в фигурных скобках равно нулю. Следовательно, в коэффициент при $\xi^k\eta^l\sigma^m\delta^n$ ряда для нелинейности не входят величины $g_{klmn}(t)$ и $g_{0000}(t)$.

Подставляя выписанные ряды в решаемое уравнение (2), получим равенство нулю формального степенного ряда

$$\sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} \xi^k\eta^l\sigma^m\delta^n \left\{ -[(k-l)^2+(m-n)^2]g'_{klmn}(t) + \right.$$

$$+ \sum_{k_1+k_2=k} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{m_1+m_2=m} \sum_{n_1+n_2=n} \{(m_1-n_1)(k_2-l_2)-(k_1-l_1)(m_2-n_2)\} \times$$

$$\times \left[(k_2-l_2)^2+(m_2-n_2)^2\right] g_{k_1l_1m_1n_1}(t) \cdot g_{k_2l_2m_2n_2}(t) + (-\nu)\left[(k_2-l_2)^2 + \right.$$

$$\left. \left. +(m_2-n_2)^2\right]^2 g_{klmn}(t) \right\} = 0.$$

Для формального ряда это равносильно обращению в нуль всех его коэффициентов при каждом наборе степеней $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$, $n \geq 0$. Заметим, что если $k = l$ и $m = n$, то есть $s^2 = (k-l)^2 + (m-n)^2 = 0$, то все три слагаемых в фигурных скобках обращаются в нуль, что дает верное равенство. Записывая это равенство при $s^2 = (k-l)^2 + (m- n)^2 > 0$, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение для $g_{klmn}(t)$, поскольку в неоднородность войдут только коэффициенты $g_{k_il_im_in_i}(t)$, $i \in \{1,2\}$, с индексами $(k_i,l_i,m_i,n_i) \leq (k,l,m,n)$, причем, как было замечено выше, $0 \neq (k_i,l_i,m_i,n_i) \neq (k,l,m,n)$, то есть уже найденные в соответствие со стандартной рекуррентной процедурой решения этой цепочки уравнений на коэффициенты. Следовательно, по формуле Коши, так как

$$g'_{klmn}(t) = -\nu[(k-l)^2+(m-n)^2]g_{klmn}(t) + \frac{1}{[(k-l)^2+(m-n)^2]} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k_1+k_2=k} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{m_1+m_2=m} \sum_{n_1+n_2=n} [(m_1-n_1)(k_2-l_2)-(k_1-l_1)(m_2-n_2)] \times$$

$$\times\left[(k_2-l_2)^2+(m_2-n_2)^2\right]g_{k_1l_1m_1n_1}(t)\cdot g_{k_2l_2m_2n_2}(t),$$

имеем

$$g_{klmn}(t)=g_{klmn}(0)exp\left\{-\nu[(k-l)^2+(m-n)^2]t\right\}+\frac{1}{[(k-l)^2+(m-n)^2]}\cdot$$
$$\cdot\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}[(m_1-n_1)(k_2-l_2)-(k_1-l_1)(m_2-n_2)]\times \tag{4}$$
$$\times\left[(k_2-l_2)^2+(m_2-n_2)^2\right]\int\limits_0^t exp\left\{\nu\left[(k-l)^2+(m-n)^2\right](\tau-t)\right\}g_{k_1l_1m_1n_1}(\tau)\cdot g_{k_2l_2m_2n_2}(\tau)d\tau.$$

Для записи этого решения в обозримом виде введем следующие обозначения. Пусть $\overrightarrow{v_j}=(k_j-l_j,m_j-n_j,0)$, $j\in\{1,2\}$ – трехмерные векторы, s_j^2 – квадраты их модулей, тогда s^2 – квадрат модуля их суммы $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$. Используя формулу векторного произведения векторов $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y,b_z)$ в виде

$$\overrightarrow{c}=[\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}]=(c_x,c_y,c_z)=(a_yb_z-b_ya_z,a_zb_x-b_za_x,a_xb_y-b_xa_y).$$

Замечаем, что

$$(m_1-n_1)(k_2-l_2)-(k_1-l_1)(m_2-n_2)=[\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_1}]_z,$$

есть аппликата векторного произведения $\overrightarrow{v_2}$ на $\overrightarrow{v_1}$. Значит,

$$g_{klmn}(t)=g_{klmn}(0)e^{-\nu s^2t}+\frac{1}{s^2}\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}[\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_1}]_z\cdot s_2^2\cdot$$
$$\cdot\int\limits_0^t g_{k_1l_1m_1n_1}(\tau)\cdot g_{k_2l_2m_2n_2}(\tau)e^{\nu s^2(\tau-t)}d\tau.$$

Из этой формулы еще раз очевидно, что если $s^2=0$, то есть $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, то $\overrightarrow{v_2}=-\overrightarrow{v_1}$, и сумма, записанная во втором слагаемом, равна нулю, так как

$$[\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_1}]=[-(\overrightarrow{v_1})\times\overrightarrow{v_1}]=-[\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_1}]=\overrightarrow{0}.$$

Формальное решение построено, теперь можно вычислить коэффициенты с маленькими номерами k, l, m, n (для самоконтроля и базы индукции) и перейти к теоремам сходимости.

Основная проблема в том, что все операции с ψ законны только если область сходимости ряда содержит некоторый поликруг $|\xi|\le R$, $|\eta|\le R$, $|\sigma|\le R$, $|\delta|\le R$ в четырехмерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^4$, причем по смыслу экспоненциальных рядов должно быть $R>1$, т.к. $|e^{\pm ix}|=|e^{\pm iy}|=1$ при вещественных x и y.

2 Сходимость построенного ряда

Поскольку в уравнение в форме Гельмгольца входят производные от ψ, необходимо постулировать сходимость домноженных на некоторые степени $(k-l)$ и $(m-n)$ рядов для начальных данных. Это можно интерпретировать как введение некоторых нормирований на пространствах решений. Так, старшие производные в уравнении возникают от члена $\nu\Delta\Delta\psi$, и поскольку, оператор Δ приводит к домножению коэффициента $g_{klmn}(t)$ на s^2, надо оценивать "величину", сводящуюся к $|g_{klmn}(t)|\left[(k-l)^2+(m-n)^2\right]$.

Пусть ряд для начальных данных

$$\psi(x,y,0)=\sum_{k,l,m,n=0}^{\infty}g_{klmn}(0)\xi^k\eta^l\sigma^m\delta^n=f(\xi,\eta,\sigma,\delta,0)$$

таков, что $f(\xi,\eta,\sigma,\delta,0)$ есть аналитическая функция в поликруге $|\xi|\le R$, $|\eta|\le R$, $|\sigma|\le R$, $|\delta|\le R$, где $R>1$. Тогда, как известно, для всех $r<R$, $r\ge 0$ эта функция будет аналитична в поликруге любого меньшего радиуса r, как и все ее производные. Следует отметить, что при $R=1$ записанная функция $\psi(x,y,0)$ есть сходящийся ряд.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\xi,\eta,\sigma,\delta)=\sum_{k,l,m,n=0}^{\infty}[(k-l)^2+(m-n)^2]g_{klmn}(0)\xi^k\eta^l\sigma^m\delta^n=\sum_{k,l,m,n=0}^{\infty}s^2g_{klmn}(0)\xi^k\eta^l\sigma^m\delta^n,$$

в силу ее аналитичности ее максимум модуля достигается на остове поликруга радиуса r, и пусть он равен M_r. Находя рекуррентно коэффициенты $g_{klmn}(t)$, обозначим

$$G_{klmn}(t)=\max_{0\le\theta\le t}|g_{klmn}(\theta)|.$$

Тогда, из формулы Коши (4), получим оценку

$$G_{klmn}(t)\le|g_{klmn}(0)|+\frac{1}{s^2}\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}|[\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_1}]|\cdot s_2^2\cdot$$

$$\cdot\max_{0\le\theta\le t}\left|\int_0^\theta g_{k_1l_1m_1n_1}(\tau)\cdot g_{k_2l_2m_2n_2}(\tau)e^{\nu s^2(\tau-\theta)}d\tau\right|\le$$

$$\le|g_{klmn}(0)|+\frac{1}{s^2}\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}s_2\cdot s_1\cdot s_2^2\cdot$$

$$\cdot G_{k_1l_1m_1n_1}(t)\cdot G_{k_2l_2m_2n_2}(t)\max_{0\le\theta\le t}\left|\int_0^\theta e^{\nu s^2(\tau-\theta)}d\tau\right|\le$$

$$\le|g_{klmn}(0)|+\frac{1}{s^2}\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}s_1\cdot s_2^3\cdot G_{k_1l_1m_1n_1}(t)\cdot G_{k_2l_2m_2n_2}(t)\cdot\frac{1}{\nu s^2}=$$

$$=|g_{klmn}(0)|+\frac{1}{\nu s^4}\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}s_1\cdot s_2^3\cdot G_{k_1l_1m_1n_1}(t)\cdot G_{k_2l_2m_2n_2}(t),\qquad(5)$$

(при составлении оценки учитывалось, что $|[\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_1}]|\le|\overrightarrow{v_2}|\cdot|\overrightarrow{v_1}|$, $\left|\int_0^\theta f(\tau)d\tau\right|\le\int_0^\theta|f(\tau)|d\tau$, $G_{k_il_im_in_i}(\tau)$ – возрастающая функция).

Для введения оцениваемой величины домножим (5) на s^4 и положим

$$F_{k_il_im_in_i}(t)=s_i^4G_{k_il_im_in_i}(t).$$

Получим оценку

$$F_{klmn}(t)\le F_{klmn}(0)+\frac{1}{\nu}\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}s_1\cdot s_3^2\cdot\frac{1}{s_1^4}\cdot\frac{1}{s_2^4}F_{k_1l_1m_1n_1}(t)F_{k_2l_2m_2n_2}(t)\le$$

$$\le F_{klmn}(0)+\frac{1}{\nu}\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}F_{k_1l_1m_1n_1}(t)F_{k_2l_2m_2n_2}(t),$$

т.к.

$$\frac{s_1s_3^2}{s_1^4s_2^4}=\frac{1}{s_1^3s_2}\le1$$

ввиду того, что $s_i\ge1$ при $s_i\ne0$.

Определяя мажорантную последовательность $U_{klmn}(t)$ рекуррентными соотношениями

$$U_{klmn}(t)=F_{klmn}(0)+\frac{1}{\nu}\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}U_{k_1l_1m_1n_1}(t)U_{k_2l_2m_2n_2}(t).$$

Видим, что $U_{klmn}(t) \geq F_{klmn}(t)$, и производящая функция

$$U = U(\xi, \eta, \sigma, \delta, t) = \sum_{k,l,m,n=0} U_{klmn}(t) \xi^k \eta^l \sigma^m \delta^n$$

для любого t есть решение (обычного, алгебраического) квадратного уравнения

$$U = \varphi + \frac{1}{\nu} U^2.$$

Решая его, получаем функцию

$$U = \frac{\nu}{2} - \sqrt{\frac{\nu^2}{4} - \nu\varphi}$$

(знак минус перед корнем берем, чтобы $U = 0$ при $\varphi = 0$ и чтобы все коэффициенты Тейлора функции U были неотрицательны). Поскольку при $\varphi < \nu/4$ функция U будет аналитической в окрестности начала координат $\xi = \eta = \sigma = \delta = 0$ содержащей, в силу предположения поликруг радиуса r, если $M_r < \nu/4$. Итак, доказана

Теорема. Пусть $\psi(x, y, 0)$ есть периодическая функция, причем сумма модулей членов ряда Фурье для $\Delta\Delta\psi(x, y, 0)$ меньше, чем $\nu/4$. Тогда при всех $t \geq 0$ решение $\psi(x, y, t)$ уравнения в форме Гельмгольца есть периодическая по x, y функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье для $\Delta\Delta\psi(x, y, t)$.

3 Аналог теоремы Ковалевской

Поскольку в нелинейность входят производные от ψ по пространственным переменным x, y порядка максимум три, а с линейной частью "всё в порядке", проблем со сходимостью нет, то можно попытаться оценивать производные третьего порядка.

Пусть формальный ряд для начальных данных

$$\psi(x, y, 0) = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} g_{klmn}(0) S^k(x) T^l(x) S^m(y) T^n(y) = f(\xi, \eta, \sigma, \delta, 0)$$

таков, что представляет собою аналитическую функцию в окрестности начала координат $\xi = \eta = \sigma = \delta = 0$, содержащей поликруг радиуса $R > 1$.

Лемма.

$$s \leq N$$

Доказательство.

$$\begin{cases} s = \sqrt{(k-l)^2 + (m-n)^2}; \\ k \geq 0, l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0; \\ k + l + m + n = N \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N^2 = k^2 + l^2 + m^2 + n^2 + 2kl + 2km + 2kn + 2lm + 2ln + 2mn; \\ s^2 = k^2 + l^2 + m^2 + n^2 - 2kl - 2mn \end{cases}$$

$$N^2 - s^2 = 4kl + 2km + 2kn + 2lm + 2ln + 4mn \geq 0.$$

Следовательно,

$$N^2 \geq s^2,$$

т.е. $s \leq N$. Неравенство превращается в равенство только когда в точности одно из этих чисел k, l, m, n строго больше нуля.

Будем оценивать величины

$$s^2 |g_{klmn}(t)| = [(k-l)^2 + (m-n)^2] |g_{klmn}(t)|.$$

Из рекуррентной формулы имеем

$$s^2|g_{klmn}(t)| \le s^2|g_{klmn}(0)|+$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{m_1+m_2=m}\sum_{n_1+n_2=n}\frac{s_1s_2^3}{(s_1s_2)^2}\int\limits_0^t |s_1^2 g_{k_1l_1m_1n_1}(\tau)|\cdot|s_2^2 g_{k_2l_2m_2n_2}(\tau)|d\tau,$$

так как $e^{-\nu s^2 t} \le 1$ и $e^{\nu s^2(\tau-t)} \le 1$ при $0 \le \tau \le t$.

Суммируя эти неравенства, получим для каждого $N \ge 1$, учитывая неравенство $\frac{s_1s_2^3}{(s_1s_2)^2} \le s_2$, оценку

$$\sum_{k+l+m+n=N} s^2(k,l,m,n)|g_{klmn}(t)| \le \sum_{k+l+m+n=N} s^2(k,l,m,n)|g_{klmn}(0)|+$$

$$+\sum_{N_1=1}^{N-1}\int\limits_0^t \sum_{k_1+l_1+m_1+n_1=N_1}\cdot|s_1^2 g_{k_1l_1m_1n_1}(\tau)| \sum_{k_2+l_2+m_2+n_2=N_2=N-N_1} s_2\cdot|s_2^2 g_{k_2l_2m_2n_2}(\tau)|d\tau.$$

Определяя мажорантную последовательность $q_N(t)$, $N \ge 1$, $t \ge 0$, рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} q_N(0) = \sum\limits_{k+l+m+n=N} s^2(k,l,m,n)|g_{klmn}(0)|; \\ \\ q_N(t) = q_N(0) + \sum\limits_{N_1}^{N-1} q_{N_1}(\tau)\cdot(N-N_1)q_{N-N_1}(\tau)d\tau; \end{cases}$$

Видим (по индукции), что для любого $N \ge 1$, $t \ge 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{k+l+m+n=N} s^2(k,l,m,n)|g_{klmn}(t)| \le q_N(t),$$

то есть $q_N(t)$ действительно является мажорантой, при этом производящая функция

$$q(r,t) = \sum_{N=1}^{\infty} q_N(t) r^N$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (типа Ковалевской)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = q\cdot r\frac{\partial q}{\partial r}$$

и начальным данным

$$q(r,0) = \varphi(r) = \sum_{N=1}^{\infty} r^n \sum_{k+l+m+n=N} s^2(k,l,m,n)|g_{klmn}(0)|,$$

причем $q(0,0) = 0$. Это задача Коши типа Ковалевской, следовательно, для малых t, $|t| < T$, при некотором $T > 0$, ряд для f сходится, полирадиус сходимости больше единицы, и вместе с ним сходится и мажорируемый им ряд для функции тока ψ в некотором поликруге радиуса $r > 1$ при $t \in [0,T)$. Итак, доказана

Теорема. Пусть функция $\psi(x,y,0)$ вещественная аналитическая периодическая функция, тогда существует такое $T > 0$, что при всех $0 \le t < T$ решение $\psi(x,y,t)$ уравнения в форме Гельмгольца есть аналитическая периодическая функция.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16-01-00401_А).

Список литературы

[1] S.P. Bautin. Analiticheskoe postroenie techenij vjazkogo gaza s pomoshh'ju posledovatel'nosti linearizovannyh sistem Nav'e-Stoksa. // *Prikladnaja matematika i mehanika*, 2(4):579-589, 1988. (in Russian) = С.П. Баутин. Аналитическое построение течений вязкого газа с помощью последовательности линеаризованных систем Навье-Стокса. // *Прикладная математика и механика*, 2(4):579-589, 1988.

[2] A.F. Sidorov, A.F. Shapeev, N.N. Janenko. *Metod differencial'nyh svjazej i ego primenenie v gazovoj dinamike.* Novosibirsk, Nauka, 1984. (in Russian) = А.Ф. Сидоров, А.Ф. Шапеев, Н.Н. Яненко. *Метод дифференциальных связей и его применение в газовой динамике.* Новосибирск, Наука, 1984.

[3] S.S. Titov. *Reshenie uravnenij s osobennost'ju v analiticheskih shkalah banahovyh prostranstv: Preprint.* Ekaterinburg, UralGAHA, 1999. (in Russian) = С.С. Титов. *Решение уравнений с особенностью в аналитических шкалах банаховых пространств: Препринт.* Екатеринбург, УралГАХА, 1999.

[4] S.S. Titov. Reshenie nelinejnyh uravnenij v analiticheskih polialgebrah. I. // *Izvestija vuzov. Matematika*, 452(1):66-77, 2000. (in Russian) = С.С. Титов. Решение нелинейных уравнений в аналитических полиалгебрах. I. // *Известия вузов. Математика*, 452(1):66-77, 2000.

[5] S.S. Titov. Reshenie nelinejnyh uravnenij v analiticheskih polialgebrah. II. // *Известия вузов. Математика*, 457(6):45-52, 2000. (in Russian) = С.С. Титов. Решение нелинейных уравнений в аналитических полиалгебрах. II // *Известия вузов. Математика*, 457(6):45-52, 2000.

[6] С.С. Титов. Non-local Solutions of the Cauchy Problem in Scales of Analytic Poly-algebras. // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 9(2):148-172, 2003. = С.С. Титов. Нелокальные решения задачи Коши в шкалах аналитических полиалгебр. // *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 9(2):148-172, 2003.

Special series for two-dimensional incompressible flows in the model of Navier-Stokes

Sergei S. Titov
Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)

Kristina V. Kurmaeva
Branch of Ural State University of Railway Transport in Nizhny Tagil (Nizhny Tagil)

Abstract. Modern fluid dynamics solution of Navier-Stokes equations is one of the urgent tasks. Scientific interest in the study of these equations has the theoretical and practical aspect. The Navier-Stokes equations is a system of differential equations describing the motion of viscous Newtonian fluid. In the article the model of Navier-Stokes in the form of electromagnetic waves for two-dimensional incompressible flow, for which the method of construction of solutions in the form of formal series. The novelty of this material lies in the formulation and the proof of convergence of the constructed series as the analogue of the Kovalevskaya theorem.

Keywords: Navier-Stokes, Kovalevskaya, convergence, series.