Экспоненциальная устойчивость по профилю повторения дифференциальных повторяющихся процессов

М.А. Емельянов
mikhailemelianovarzamas@gmail.com

Арзамасский политехнический институт (филиал) НГТУ им. Р.Е. Алексеева (Арзамас)

Аннотация

В работе рассматриваются класс 2D систем в форме дифференциальных повторяющихся процессов. Получены новые условия экспоненциальной устойчивости по профилю повторения на основе развития метода векторных функций Ляпунова для рассматриваемого класса систем.

Ключевые слова: 2D-системы; дифференциальные повторяющиеся процессы; экспоненциальная устойчивость по профилю повторения; векторная функция Ляпунова.

1 Введение

Многие автоматические системы многократно выполняют одну и ту же операцию одинаковой продолжительности. В литературе, посвященной исследованию и проектированию таких систем, эту операцию обычно называют циклом или повторением [9]. После окончания каждого цикла, перед тем как начать выполнение нового, система возвращается в начальное состояние. Выходная переменная в таких системах называется профилем повторения. Характерным примером является конвейер для резки угля, где профилем повторения (прохода) является верхняя часть угольного пласта выше нулевой линии, и целью является извлечение максимального количества угля за проход. Режущая машина опирается на предыдущий профиль прохода для того, чтобы произвести следующий проход, при этом не исключено, что могут возникнуть колебания профиля, амплитуда которых будет возрастать от повторения к повторению.

При появлении подобных колебаний, процесс должен быть остановлен для того, чтобы скорректировать профиль вручную для их гашения с целью восстановления нормального процесса резания и предотвращения возможных механических повреждений режущей машины. Альтернативой является использование управляющих воздействий, направленных на подавление указанных колебаний, но задача стабилизации в данном случае не может быть решена стандартными методами теории управления. В самом деле, здесь протекает два связанных динамических процесса: процесс резки пласта на текущем проходе и процесс смены проходов. Таким образом, динамика системы зависит от двух переменных: времени на текущем цикле и номера цикла. Системы, обладающие подобной особенностью, называются двумерными или 2D системами. Такие системы относятся к классу так называемых повторяющихся процессов. Структура этих процессов является неоднородной (гибридной), поскольку каждый цикл - это динамический процесс с непрерывным временем, а процесс смены циклов - дискретный процесс. Повторяющиеся процессы представляют

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

существенный интерес как с теоретической, так и с инженерной точки зрения. Они встречаются во многих промышленных установках, в технологических процессах и устройствах, например многопроходная сварка, или высокоточное лазерное напыление металла [10], управление турбиной ветрового электрогенератора. Алгоритмы управления с итеративным обучением начали также получать распространение в мультиагентных системах, для решения задачи управления множеством связанных информационной сетью динамических систем (агентов) в частности, беспилотных летательных аппаратов [2, 6].

Подавляющее большинство исследований, посвященных изучению повторяющихся процессов ограничивается лишь линейными моделями таких систем с постоянными параметрами [3].Существующие алгоритмы построения управления для повторяющихся процессов не могут быть применены в нелинейной постановке и следовательно возникает необходимость в разработке строгой теории устойчивости для нелинейных повторяющихся процессов. Важные примеры нелинейных повторяющихся процессов представлены в [11], где проводятся исследования относительно включения смарт-устройств в систему ротора ветрогенератора в сочетании с управлением с итеративным обучением для повышения качественных характеристик ветрогенератора, снижения экстремальных нагрузок на рабочие лопасти и сохранения максимальной производительности. Другой важный пример представлен в уже упомянутой работе [10], где управление с итеративным обучением применяется к конвейерной системе высокоточного лазерного напыления металла. Число работ, посвященных исследованию нелинейных систем, относительно невелико [5, 7]. Важно также отметить, что во многих работах рассматриваются дискретные нелинейные модели, в то же время, как уже было отмечено, исходные модели являются непрерывно-дискретными. В нелинейном случае перейти к однородной дискретной модели достаточно сложно или невозможно. Поэтому необходимо априори рассматривать гибридные непрерывно-дискретные модели, получившие название дифференциальных повторяющихся процессов.

Известные условия экспоненциальной устойчивости дифференциальных повторяющихся процессов [4] накладывают однотипные ограничения на динамику профиля повторения при $T \to \infty$. Эти условия могут оказаться чрезмерно жесткими для синтеза закона управления. Поэтому нужны такие условия устойчивости, которые учитывали бы ограниченность профиля повторения. Схожие трудности возникают и в рамках линейной теории, где в качестве альтернативы предложено понятие практической устойчивости [8]. В данной работе для рассматриваемого класса систем предлагаются новые достаточные условия экспоненциальной устойчивости по профилю повторения, учитывающие в отличие от известных, ограниченность профиля повторения.

2 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальный повторяющийся процесс с длительностью повторения $T < \infty$, $0 \le t \le T$ описываемый следующей моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= f_1(x_{k+1}(t), y_k(t)), \\ y_{k+1}(t) &= f_2(x_{k+1}(t), y_k(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

где на $k-$,м шаге: $x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния, $y_k(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор профиля повторения, $u_k(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — входной вектор; f_1, f_2, g — нелинейные функции, такие, что $f_1(0,0) = 0$, $f_2(0,0) = 0$ и, следовательно, равновесны нулю. Кроме того, f_1 удовлетворяет условию Липшица по переменным x и y:

$$|f_1(x', y') - f_i(x'', y'')| \le L(|x' - x''| + |y' - y''|), x', x'' \in \mathbb{R}^{n_x},\ y', y'' \in \mathbb{R}^{n_y}. \tag{2}$$

Схематично динамика системы представлена на Рис. 1.

Граничные условия, т.е. последовательность начальных векторов состояния и начальный профиль повторения имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(0) &= d_{k+1},\ k \ge 0,\ |d_{k+1}|^2 \le \kappa_d \lambda_d^{k+1},\ k \ge 0, \\ y_0(t) &= f(t),\ |f(t)|^2 \le M_f,\ 0 \le t \le T, \end{aligned} \tag{3}$$

где входные значения $d_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_x}$ — известные постоянные, где входные значения $f(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — известные функции $++t$ и $\kappa_d > 0$, $0 < \lambda_d < 1$ и предполагается, что выполнены условия

$$|f(p)|^2 \le M_f,\ |d_{k+1}|^2 \le \kappa_d \lambda_d^{k+1},\ k \ge 0, \tag{4}$$

где $|q|$ — Евклидова норма вектора q.

Определения устойчивости для (1) можно ввести следующим образом.

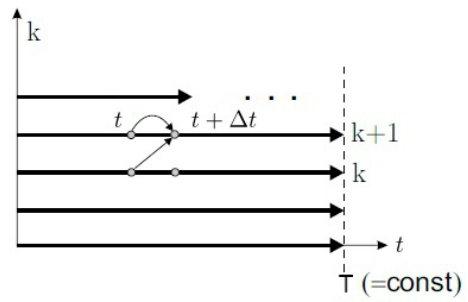

Рис. 1: Динамика повторяющегося процесса.

Определение 1 [4] *Нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс* (1), (3) *называется экспоненциально устойчивым, если существуют действительные* $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ *и* $0 < \zeta < 1$ *такие, что*

$$|x_k(t)|^2 + |y_k(t)|^2 \leq \kappa \exp(-\lambda t)\zeta^k. \tag{5}$$

Определение 2 *Нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс* (1), (3) *называется экспоненциально устойчивым по профилю повторения если*

$$|y_k(t)|^2 \leq \kappa\zeta^k, \ \kappa > 0, \ 0 < \zeta < 1. \tag{6}$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Легко видеть, что если система (1), (3) экспоненциально устойчива, то она будет экспоненциально устойчива по профилю повторения, кроме того в определении экспоненциальной устойчивости не учитывается ограниченность профиля повторения.

Задача состоит в нахождении условий экспоненциальной устойчивости системы (1), (3) по профилю повторения, т.е. в смысле определения 2.

3 Условия устойчивости

Одна из особенностей системы (1), (3) состоит в том, что найти аналог полной производной функции, зависящей от переменных состояния и профиля повторения вдоль ее траекторий не представляется возможным без явного нахождения решения в отличие от обычных систем, разрешенных относительно первых производных (первых разностей) вектора состояния. В связи с этим не представляется возможным использовать метод функций Ляпунова в его классической версии. Альтернативой может служить метод векторных функций Ляпунова, в котором вместо традиционной системы сравнения [1] используется аналог дивергенции векторной функции в силу системы.

Для получения условий устойчивости системы (1), (3), введем векторную функцию Ляпунова вида:

$$V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t)) \\ V_2(y_k(t)) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $V_1(x) \geq 0$, $V_2(y) > 0$, $x, y \neq 0$, $V_1(0) = 0$ и $V_2(0) = 0$, положительные полу-определённые и положительно определены функции соответственно. Аналог оператора дивергенции векторной функции (7) вдоль траекторий системы (1) имеет вид

$$\mathcal{D}_c V(x_{k+1}(t), y_k(t)) \quad = \quad \frac{dV_1(x_{k+1}(t))}{dt} + \Delta_k V_2(y_k(t)), \tag{8}$$

где

$$\Delta_k V_2(y_k(t)) = V_2(y_{k+1}(t)) - V_2(y_k(t)).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 *Предположим, что существует векторная функция (7) и положительные скаляры c_1, c_2, c_3 и c_4 такие, что*

$$\begin{aligned} c_1|x|^2 \le V_1(x) &\le c_2|x|^2, \qquad (9)\\ c_1|y|^2 \le V_2(y) &\le c_2|y|^2, \qquad (10)\\ \mathcal{D}_c V(x_{k+1}(t), y_k(t)) &\le -c_3|y_k(t)|^2,\ t\in[0,T], \qquad (11)\\ \left|\frac{\partial V_1(x)}{\partial x}\right| &\le c_4|x|. \qquad (12)\end{aligned}$$

Тогда нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс (1), (3) экспоненциально устойчив по профилю повторения.

Доказательство. Из (10) и (11) следует, что существует $\bar{c}_3 \le c_3$ такое, что

$$\lambda_d^{\frac{1}{2}} \le \zeta := 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2} < 1 \qquad (13)$$

и

$$\mathcal{D}_c V(x_{k+1}(t), y_k(t)) \le -c_3|y_k(t)|^2 \le -\bar{c}_3|y_k(t)|^2. \qquad (14)$$

Далее из (11) и (14) следует неравенство

$$\frac{dV_1(x_{k+1}(t))}{dt} + V_2(y_{k+1}(t)) - \zeta V_2(y_k(t)) \le 0. \qquad (15)$$

Это неравенство, как и все последующие, в силу (11) справедливо при $t \in [0,T]$. Решая неравенство (15) относительно $V_1(x_{k+1}(t))$ получим

$$V_1(x_{k+1}(t)) \le V_1(x_{k+1}(0)) - \int_0^t [V_2(y_{k+1}(s)) - \zeta V_2(y_k(s))]ds. \qquad (16)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} W_{k+1}(t) &:= V_1(x_{k+1}(0)) - V_1(x_{k+1}(t)),\\ H_k(t) &:= \int_0^t V_2(y_k(s))ds \end{aligned}$$

и перепишем (16) в виде

$$H_{k+1}(t) \le \zeta H_k(t) + W_{k+1}(t). \qquad (17)$$

Решая неравенство (17) относительно $H_n(t)$ получим

$$H_n(t) \le \zeta^n H_0(t) + \sum_{k=1}^n W_k(t)\zeta^{n-k} \qquad (18)$$

или

$$\int_0^t V_2(y_n(s))ds + \sum_{k=1}^n V_1(x_{k+1}(t))\zeta^{n-k} \le \sum_{k=1}^n V_1(x_k(0))\zeta^{n-k} + \zeta^n \int_0^t V_2(y_0(s))ds.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\zeta^{-n}\int_0^t V_2(y_n(s))ds + \sum_{k=1}^n V_1(x_{k+1}(t))\zeta^{-k} \le \zeta^{-n}\sum_{k=1}^n V_1(x_k(0))\zeta^{n-k} + \int_0^t V_2(y_0(s))ds. \qquad (19)$$

Оценивая правую часть (19) с учетом (3), (9), (10) и (13) получим

$$\zeta^{-n}\sum_{k=1}^n V_1(x_k(0))\zeta^{n-k} + \int_0^t V_2(y_0(s))ds \le \sum_{k=1}^n \kappa\kappa_d\lambda_d^k\zeta^{-k} + \int_0^t c_2 M_f ds \le$$

$$\le \sum_{k=1}^\infty \kappa\kappa_d\zeta^k + c_2M_fT = \frac{\kappa\kappa_d}{1-\zeta} + c_2M_fT = C(T). \qquad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} V_1(x_{k+1}(t))\zeta^{-k} \le C(T) < \infty. \tag{21}$$

Оценивая $\frac{dV_1(x)}{dt}$ с учетом условия Липшица (2) и (12) получим

$$\frac{dV_1(x_{k+1}(t))}{dt} = \frac{\partial V_1(x_{k+1}(t))}{\partial x_{k+1}(t)} f_1(x_{k+1}(t), y_k(t)) \ge - \left| \frac{\partial V_1(x_{k+1}(t))}{\partial x_{k+1}(t)} \right| |f_1(x_{k+1}(t), y_k(t))| \ge$$
$$\ge -c_4 L(|x_{k+1}(t)| + \varepsilon|y_k(t)|)(|x_{k+1}(t)| + |y_k(t)|) \ge -2c_4 L \left(\frac{\varepsilon+1}{2\sqrt{\varepsilon}} |x_{k+1}(t)| + \sqrt{\varepsilon}|y_k(t)| \right)^2 \ge$$
$$\ge -2c_4 L \left(2 \left(\frac{\varepsilon+1}{2\sqrt{\varepsilon}} |x_{k+1}(t)| \right)^2 + 2(\sqrt{\varepsilon}|y_k(t)|)^2 \right) \ge -\alpha V_1(x_{k+1}(t)) - \beta\varepsilon V_2(y_k(t)), \tag{22}$$

где $\alpha = \frac{c_4 L(\varepsilon+1)^2}{c_1 \varepsilon}$, $\beta = \frac{4c_4 L}{c_1}$, и ε – произвольный положительный скаляр. Из (15), (22) имеем

$$V_2(y_{k+1}(t)) - z_0 V_2(y_k(t)) \le \alpha V_1(x_{k+1}(t)), \tag{23}$$

где $z_0 = \zeta + \beta\varepsilon$. Выбирая ε достаточно малым, таким что $0 < z_0 < 1$, и решая (23) получим

$$V_2(y_n(t)) \le z_0^n V_2(y_0(t)) + \alpha \sum_{k=1}^{n} z_0^{n-k} V_1(x_{k+1}(t)).$$

Отсюда, с учетом (21) и (10) приходим к неравенству

$$z_0^n V_2(y_n(t)) \le V_2(y_0(t)) + \alpha \sum_{k=1}^{n} z_0^{-k} V_1(x_{k+1}(t)) \le c_2 |y_0(t)|^2 + \alpha \sum_{k=1}^{n} \zeta^{-k} V_1(x_{k+1}(t)) \le$$
$$\le c_2 |y_0(t)|^2 + \alpha C(T). \tag{24}$$

Из (24) с учетом (10) и (3) имеем

$$|y_n(t)|^2 \le \frac{c_2 M_f + \alpha C(T)}{c_1} z_0^n, \tag{25}$$

откуда следует справедливость (6) при $\kappa = \frac{c_2 M_f + \alpha C(T)}{c_1} z_0^n$ и $\zeta = z_0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-38-00304 мол_а.

Автор благодарит проф. П. В. Пакшина за ценное обсуждение статьи.

Список литературы

[1] V. M. Matrosov. *The Method of Vector Lyapunov Functions: Analysis of Dynamical Properties of Dynamical Systems.* Moscow: Fizmatlit, 2001. (in Russian) = В. М. Матросов. *Метод векторных функций Ляпунова: Анализ динамических свойств нелинейных систем.* М.: Физматлит, 2001.

[2] K. Barton, D. Kingston. Systematic Surveillance for UAVs: A Feedforward Iterative Learning Control Approach. *2013 American Control Conference*, 5917–5922, 2013.

[3] L. Hladowski, K. Galkowski, Z. Cai, E. Rogers, C. Freeman, P. Lewin. Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance. *Control Engineering Practice*, 18:339—348, 2010.

[4] K. Galkowski, M. Emelianov, P. Pakshin, E. Rogers. Vector Lyapunov functions for stability and stabilization of differential repetitive processes. *J. Computer Syst. Sci. International*, 55:503–514, 2016.

[5] J. Kurek. Stability of nonlinear time-varying digital 2-D Fornasini-Marchesini system. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 25(1):235–244, 2012.

[6] Y. Liu, Y. Jia. An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 61:148–154, 2012.

[7] P. Pakshin, K. Galkowski, E. Rogers. Stability and Stabilization of Systems Modeled by 2D Nonlinear Stochastic Roesser Model. *Proc. 7th Int. Workshop on Multidimensional (nD) systems*, 2011.

[8] W. Paszke, P. Dabkowski, E. Rogers, K. Galkowski. New results on strong practical stability and stabilization of discrete linear repetitive processes. *Systems & Control Letters*, 75:22–29, 2015.

[9] E. Rogers, K. Galkowski, D. H. Owens. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes.* Springer (Lecture Notes in Control and Information Sciences), 2007.

[10] P. M. Sammons, D. A. Bristow, R. G. Landers. Iterative learning control of bead morphology in Laser Metal Deposition processes. *Proceedings of the 2013 American Control Conference*, 5942–5947, 2013.

[11] O.Tutti, M. Blackwell, E. Rogers, R. Sandberg. Iterative Learning Control for Improved Aerodynamic Load Performance of Wind Turbines With Smart Rotors. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 22:967–979, 2013.

Pass profile exponential stability of nonlinear differential repetitive processes

Mikhail A. Emelianov
Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University (Arzamas, Russia)

Abstract. This paper consider a class of $2D$ systems by the form of repetitive processes. A new results of pass profile exponential stability for differential nonlinear repetitive processes, based on an extension of the Lyapunov's method. Using vector Lyapunov function and its divergence, sufficient conditions for pass profile exponential stability are obtained.

Keywords: 2D systems,differential repetitive processes, pass profile exponential stability, vector Lyapunov function.