Асимптотическая устойчивость нелинейных систем Роессера

Ю.П. Емельянова
EmelianovaJulia@gmail.com

Арзамасский политехнический институт (филиал) НГТУ им. Р.Е. Алексеева (Арзамас)

Аннотация

В работе рассматривается нелинейная дискретная модель Роессера. На базе метода векторных функций Ляпунова получены новые достаточные условия асимптотической устойчивости таких систем. Результаты обобщены на случай стохастических моделей.

Ключевые слова: 2D-системы; модель Роессера; асимптотическая устойчивость; векторная функция Ляпунова.

1 Введение

В середине 70-х годов прошлого века в связи с задачами обработки изображений была предложена дискретная модель [10], особенностью которой являлось то, что вектор состояния, содержащий информацию об изображении, представлялся как функция двух независимых переменных (горизонтальной и вертикальной) на координатной плоскости и разделялся на две составляющих, описывающих динамику процесса обработки изображения отдельно в горизонтальном и вертикальном направлениях. Эта модель вызвала широкий теоретический и прикладной интерес и получила название модели Роессера по имени автора [10]. Она положила начало исследованию нового класса динамических систем, в которых независимая переменная является векторной, в отличие от общепринятого скалярного времени. Такие системы получили название nD-систем, где $n > 1$ – размерность вектора независимых переменных.

Другой класс линейных дискретных 2D-систем составляют системы Форназини–Маркезини [3], которые появились в задачах исследования двумерных цифровых фильтров и позднее использовалась в задачах обработки сигналов. Модель Форназини–Маркезини также описывает двумерную динамику, но имеет единственный вектор состояния, который не разделяется на вертикальную и горизонтальную компоненты, как в случае модели Роессера.

Позднее такие модели и их модификации, в форме так называемых повторяющихся процессов, появились в задачах робототехники и при автоматизации процессов в горнодобывающей промышленности [11]. Модель в форме повторяющегося процесса отличает от других 2D моделей то, что одна из двух независимых переменных изменяется на ограниченном интервале.

Теорию устойчивости и стабилизации 2D-систем не удается построить как простое обобщение известных результатов теории обычных (1D) систем, в которых единственной независимой переменной является время. Одним из наиболее эффективных методов для исследования устойчивости 2D систем является второй метод Ляпунова. В то же время, для рассматриваемого класса систем этот метод имеет существенные особенности. Особенности 2D систем состоят в том, что их математические модели или задают частные

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

приращения переменных состояния (в случае дискретных моделей), или не разрешены явно относительно производных всех переменных состояния (в случае непрерывных моделей). В связи с этим стандартное применение второго метода Ляпунова не представляется возможным, поскольку для нахождения полного приращения или полной производной функции Ляпунова в силу системы, пришлось бы находить решение системы, в результате чего теряется главное преимущество метода. Альтернативой служит метод векторных функций Ляпунова, в котором вместо традиционной системы сравнения используется аналог дивергенции векторной функции в силу системы [2].

В некоторых приложениях встречаются модели 2D-систем с непрерывной динамикой. Например, в [1] для описания динамики сорбционного процесса, который возникает в сточных водах и и при очистке сточных вод, используется непрерывная модель Роессера, которая в некоторых случаях сводится к известному в математической литературе уравнению Гурса. Известны также дискретно-непрерывные (гибридные) версии 2D-систем [4, 5].

Исследование устойчивости и стабилизации 2D-систем в подавляющем большинстве работ проводилось в рамках линейных моделей. Работы, связанные с изучением устойчивости нелинейных 2D-систем, стали появляться лишь совсем недавно. Например, в [9] изучалась устойчивость нелинейных детерминированных и стохастических систем Роессера. В [6] исследовалась устойчивость нелинейных дискретных систем Форназини–Маркезини. В [12] сформулированы прямая и обратная теоремы Ляпунова для исследования асимптотической и экспоненциальной устойчивости нелинейных дискретных систем Роессера. В [2] развит метод векторных функций Ляпунова для исследования экспоненциальной устойчивости дискретных нелинейных повторяющихся процессов, а в [7] результаты обобщены на дискретные нелинейные nD ($n \geq 2$) системы Роессера. В [8] получены прямая и обратные теоремы, которые дают достаточные условия экспоненциальной устойчивости нелинейных 2D-систем Форназини-Маркезини и 2D-систем Роессера.

В [5] получены достаточные условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных 2D систем, которые выражены в терминах двухкомпонентной функции Ляпунова. В [4] на базе метода векторных функций Ляпунова получены условия экспоненциальной устойчивости для непрерывно-дискретных (дифференциальных) повторяющихся процессов и на базе этих результатов решена задача синтеза управления с итеративным обучением, где эти условия сведены к вычислимой форме в терминах линейных матричных неравенств.

Главной мотивацией данной работы является то, что в существующей литературе исследуется лишь экспоненциальная устойчивость нелинейных систем Роессера. Известные условия асимптотической устойчивости [12], получены как следствие экспоненциальной устойчивости. Экспоненциальная устойчивость это естественное свойство линейных систем и, как хорошо известно, для линейных 1D систем асимптотическая и экспоненциальная устойчивость эквивалентны. Для нелинейных систем это не так, здесь система может быть асимптотически устойчива, но но не являться экспоненциально устойчивой [5]. Ясно, что условия экспоненциальной устойчивости более консервативны и для решения задач стабилизации часто достаточно требовать лишь выполнения условий асимптотической устойчивости.

В данной работе, для нелинейных 2D систем Роессера получены новые, менее ограничительные по сравнению с известными [12], условия асимптотической устойчивости в терминах свойств векторной функции Ляпунова. Результаты обобщены на стохастический случай.

2 Асимптотическая устойчивость нелинейных систем Роессера

Рассмотрим нелинейную дискретную модель Роессера, которая описывается следующей моделью в пространстве состояний

$$\begin{aligned} x_1(i+1,j) &= f_1(x_1(i,j), x_2(i,j)), \\ x_2(i,j+1) &= f_2(x_1(i,j), x_2(i,j)), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_k \in R^{n_k},\ k = 1,2$ — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора состояния, $f_k(x_1, x_2),\ k = 1,2$ — нелинейные функции такие, что $f_k(0,0) = 0,\ k = 1,2$ (что дает равновесие в начале координат). Схематично динамика системы представлена на рисунке 1.

Граничные условия заданы в виде

$$x_1(0,j) = g_1(j),\ x_2(i,0) = g_2(i), \tag{2}$$

где $g_k,\ k = 1,2$ — известные векторы такие, что

$$|g_k(n)|^2 \leq \kappa_k \rho^n,\ 0 < \rho < 1, \tag{3}$$

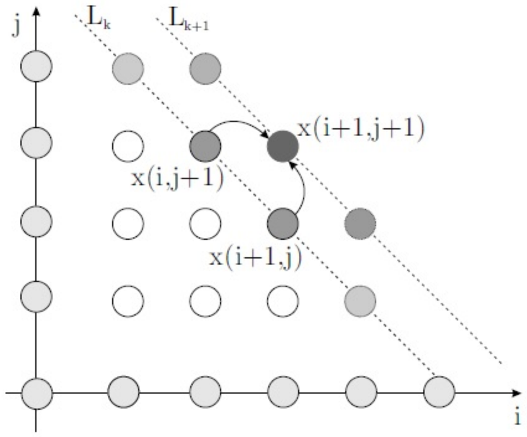

Рис. 1: Схематическая иллюстрация динамики системы Роессера

где κ_k $(k = 1, 2)$ положительная константа и $|\cdot|$ обозначает евклидову норму. Названия составляющих берут начало из задач обработки изображений, где модель Роессера впервые была введена в линейной версии [10].

Замечание 1 *Ограничения* (3) *означают, что функции* g_k, $k = 1, 2$, *либо ограничены и определены на конечных интервалах или ограничены и стремятся к нулю на бесконечных интервалах.*

Обозначим $x(i,j) = [x_1(i,j)^{\mathrm{T}}\ x_2(i,j)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и определим устойчивость следующим образом.

Определение 1 *Нелинейная система* (1), (2) *называется асимптотически устойчивой, если для всех* i, j *величина* $|x(i,j)|$ *ограничена и*

$$|x(i,j)| \to 0 \quad i + j \to \infty. \tag{4}$$

Одной из основных трудностей при использовании функции Ляпунова для анализа устойчивости рассматриваемого класса систем является то, что полное приращение этой функции или в непрерывном случае полная производная в силу системы не может быть получено без явного нахождения решения рассматриваемой системы. Это привело к идее использования векторной функции Ляпунова и ее дивергенции (или дискретного аналога) вдоль траекторий рассматриваемой системы вместо полной производной или полного приращения. Используя этот подход, в работе получены новые условия асимптотической устойчивости в терминах свойств двух функций вектора Ляпунова.

Для исследования устойчивости 2D систем в данной работе развивается метод векторных функций Ляпунова в котором ключевую роль играет аналог дивергенции этой функции. Используемая в работе функция Ляпунова имеет вид

$$V(x(i,j)) = \begin{bmatrix} V_1(x_1(i,j)) \\ V_2(x_2(i,j)) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $V_i(0) = 0,\ i = 1, 2$.

Дискретный аналог дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (1) имеет вид

$$\mathcal{D}V(x(i,j)) = V_1(x_1(i+1,j)) - V_1(x_1(i,j)) + V_2(x_2(i,j+1)) - V_2(x_2(i,j)). \tag{6}$$

Следующая теорема дает достаточные условия асимптотической устойчивости системы (1), (2) в терминах векторных функций Ляпунова вида (5).

Теорема 1 *Предположим, что существуют функции* V_h *и* V_v *вида* (5) *такие, что* $V_{h1}(x_1) > 0$, $V_{h2}(x_2) \geq 0$, $V_{v1}(x_1) \geq 0$, $V_{v2}(x_2) > 0$ *и положительные скаляры* c_{hi}, $i = 0, 1, 2, 3$, c_{vi}, $i = 0, 1, 2, 3$, *такие, что:*

$$c_{h1}|x_1|^2 \leq V_{h1}(x_1) \leq c_{h2}|x_1|^2, \tag{7}$$

$$V_{h2}(x_2(i,0)) \leq c_{h0}|x_2(i,0)|^2, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}V_h(x) \leq -c_{h3}|x_1|^2, \tag{9}$$

$$V_{v1}(x_1(0,j)) \leq c_{v0}|x_1(0,j)|^2, \tag{10}$$
$$c_{v1}|x_2|^2 \leq V_{v2}(x_2) \leq c_{v2}|x_1|^2, \tag{11}$$
$$\mathcal{D}V_v(x) \leq -c_{v3}|x_2|^2. \tag{12}$$

Тогда система (1), (2) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. Из (9) следует, что существует $\bar{c}_{h3} \leq c_{h3}$ такая, что:

$$\mathcal{D}V_h(x(i,j)) \leq -c_{h3}(|x_1(i,j)|^2 + |x_2(i,j)|^2) \leq -\bar{c}_{h3}(|x_1(i,j)|^2 + |x_2(i,j)|^2). \tag{13}$$

С учетом (7) неравенство (13) может быть записано в виде

$$V_{h2}(x_2(i,j+1)) - V_{h2}(x_2(i,j)) + \bar{c}_{h3}|x_2(i,j)|^2 + V_{h1}(x_1(i+1,j)) - \left(1 - \frac{\bar{c}_{h3}}{c_{h2}}\right) V_{h_1}(x_1(i,j)) \leq 0. \tag{14}$$

Если $c_{h3} > c_{h2}(1-\rho^{\frac{1}{2}})$, выберем $\bar{c}_{h3} < c_{h2}(1-\rho^{\frac{1}{2}})$, а если $c_{h3} \leq c_{h2}(1-\rho^{\frac{1}{2}})$, выберем $\bar{c}_{h3} < c_{h3} \leq c_{h2}(1-\rho^{\frac{1}{2}})$. Таким образом, в любом случае можно выбрать $\bar{c}_{h3}$ такую, что $\bar{c}_{h3} \leq c_{h2}(1-\rho^{\frac{1}{2}})$.

Обозначим $\zeta_1 = 1 - \frac{\bar{c}_{h3}}{c_{h2}}$. Из предыдущего неравенства следует, что ζ_1 можно выбрать из условия

$$\rho^{\frac{1}{2}} \leq \zeta_1 < 1. \tag{15}$$

Это условие гарантирует сходимость, как будет показано ниже.

Перепишем (14) в виде

$$V_{h2}(x_2(i,j+1)) - V_{h2}(x_2(i,j))\bar{c}_{h3}|x_2(i,j)|^2 + V_{h1}(x_1(i+1,j)) - \zeta_1 V_{h_1}(x_1(i,j)) \leq 0. \tag{16}$$

Решая (16) относительно $V_{h2}(x_2(i,m))$, получим

$$V_{h2}(x_2(i,m)) \leq V_{h2}(x_2(i,0)) - \sum_{j=0}^{m-1} c_{h3}|x_2(i,j)|^2 - \sum_{j=0}^{m-1}[V_{h1}(x_1(i+1,j)) - \zeta_1 V_{h1}(x_1(i,j))]. \tag{17}$$

Обозначим

$$W_i(m) = \sum_{j=0}^{m-1} V_{h1}(x_1(i+1,j)). \tag{18}$$

Из (17) следует, что

$$W_{i+1}(m) - \zeta_1 W_i(m) \leq V_{h2}(x_2(i,0)) - V_{h2}(x_2(i,m)) \leq V_{h2}(x_2(i,0)).$$

Решение этого неравенства относительно $W_n(m)$ приводит к соотношению

$$W_n(m) \leq \zeta_1^n W_0(m) + \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_1^{n-1-i} V_{h2}(x_2(i,0)) = \zeta_1^n \sum_{j=0}^{m-1} V_{h1}(x_1(0,j)) + \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_1^{n-1-i} V_{h2}(x_2(i,0)). \tag{19}$$

Вычисляя слагаемые в правой части (19) с учетом (7), (8), (3) и (15), имеем

$$\zeta_1^n \sum_{j=0}^{m-1} V_{h1}(x_1(0,j)) + \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_1^{n-1-i} V_{h2}(x_2(i,0)) \leq \left(\frac{c_{h2}\kappa_1}{(1-\rho)} + \frac{c_{h0}\kappa_2}{\zeta_1(1-\rho^{\frac{1}{2}})}\right)\zeta_1^n = C_1\zeta_1^n. \tag{20}$$

Следовательно

$$|x_1(n,j)|^2 \leq \frac{C_1}{c_{h1}}\zeta_1^n, \ \text{ для всех } \ j, \tag{21}$$

а также

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m-1} |x_1(n+1,j)|^2 \leq \frac{C_1}{c_{h1}}\zeta_1^n < \infty. \tag{22}$$

Из сходимости ряда в правой части (22) следует, что

$$|x_1(n+1,j)|^2 \to 0 \ \text{ при } \ j \to \infty \ \text{ для всех } \ n. \tag{23}$$

Таким образом, из (21) и (22) вытекает, что $|x_1(i,j)|$ ограничена и $|x_1(i,j)| \to 0$ при $i+j\to\infty$.

Аналогично используя (10)-(12) получим, что $|x_2(i,j)|$ ограничена и $|x_2(i,j)| \to 0$ при $i+j\to\infty$.

Теорема доказана.

3 Асимптотическая устойчивость стохастических систем Роессера

Рассмотрим стохастическую нелинейную 2D систему, описываемую моделью Роессера

$$
\begin{aligned}
x_1(i+1,j) &= f_1(x_1(i,j),x_2(i,j)) + \sum_{r=1}^{N} f_{1r}(x_1(i,j),x_2(i,j))v_r(i,j),\\
x_2(i,j+1) &= f_2(x_1(i,j),x_2(i,j)) + \sum_{r=1}^{N} f_{2r}(x_1(i,j),x_2(i,j))v_r(i,j),
\end{aligned} \tag{24}
$$

где $x_k \in R^{n_k}$, $k = 1,2$ — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора состояния, $f_k(x_1,x_2)$, $f_{kr}(x_1,x_2)$, $k = 1,2$, $r = 1,\dots N$ — нелинейные функции такие, что $f_k(0,0) = 0$, $f_{kr}(0,0) = 0$, $k = 1,2$, $r = 1,\dots N$; $v_r(i,j)$, $r = 1,\dots N, i,j = 1,2,\dots$ — дискретные случайные процессы такие, что для всех $q,r = 1,\dots N$ $\mathrm{E}[v_q(i,j)\ v_r(m,n)] = 0, q \neq r$, $\mathrm{E}[v_q(i,j)\ v_q(m,n)] = 0, q \neq m \cup j \neq n$, $\mathrm{E}[v_q(i,j)\ v_q(i,j)] = 1$, $\mathrm{E}[w_k(t)\ w_l(p)^{\mathrm{T}}] = 0$, $\mathrm{E}[v_k(t)\ v_l(p)^{\mathrm{T}}] = 0$ при $k \neq l \cup t \neq p$, где E — оператор математического ожидания.

Граничные условия являются детерминированными и по-прежнему заданы в виде (2) и удовлетворяют (3).

Определение 2 *Нелинейная система* (24), (2) *называется асимптотически устойчивой в среднем квадратическом, если для всех* i,j *величина* $\mathrm{E}[|x(i,j)^2|]$ *ограничена и*

$$
\mathrm{E}[|x(i,j)|^2] \to 0 \quad i+j \to \infty. \tag{25}
$$

Стохастический дискретный аналог оператора дивергенции векторной функции (5) вдоль траекторий системы (24) определится следующим образом:

$$
\mathcal{D}_{\mathcal{S}}V(\xi) = \mathrm{E}[V_1(x_1(i+1,j))|_{x_1(i,j)=\xi_1,x_2(i,j)=\xi_2}] - V_1(\xi_1) + \mathrm{E}[V_2(x_2(i,j+1))|_{x_1(i,j)=\xi_1,x_2(i,j)=\xi_2}] - V_2(\xi_2),
$$

где $\xi = [\xi_1^{\mathrm{T}}\ \xi_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

Теорема 2 *Предположим, что существуют функции* V_h *и* V_v *вида* (5) *такие, что* $V_{h1}(x_1) > 0$, $V_{h2}(x_2) \geq 0$, $V_{v1}(x_1) \geq 0$, $V_{v2}(x_2) > 0$ *и положительные скаляры* c_{hi}, $i = 0,1,2,3$, c_{vi}, $i = 0,1,2,3$, *такие, что:*

$$
c_{h1}|x_1|^2 \leq V_{h1}(x_1) \leq c_{h2}|x_1|^2, \tag{26}
$$

$$
V_{h2}(x_2(i,0)) \leq c_{h0}|x_2(i,0)|^2, \tag{27}
$$

$$
\mathcal{D}_{\mathcal{S}}V_h(x) \leq -c_{h3}|x_1|^2, \tag{28}
$$

$$
V_{v1}(x_1(0,j)) \leq c_{v0}|x_1(0,j)|^2, \tag{29}
$$

$$
c_{v1}|x_2|^2 \leq V_{v2}(x_2) \leq c_{v2}|x_1|^2, \tag{30}
$$

$$
\mathcal{D}_{\mathcal{S}}V_v(x) \leq -c_{v3}|x_2|^2. \tag{31}
$$

Тогда система (24), (2) *асимптотически устойчива в среднем квадратическом.*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству Теоремы 1.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-38-00192 мол_а.

Автор благодарит проф. П. В. Пакшина за ценное обсуждение статьи.

Список литературы

[1] M. Dymkov, K. Galkowski, E. Rogers, V. Dymkou, S. Dymkou. Modeling and control of a sorption process using 2D systems theory. *Proc. 7th Int. Worskop on Multidimensional Systems (NDS'11)*,1–6, 2011.

[2] J. Emelianova, P. Pakshin, K. Galkowski, E. Rogers. Vector Lyapunov function based stability of a class of applications relevant 2D nonlinear systems. *IFAC Proceedings Volumes (IFACPapersOnLine)*, 47(3):8247–8252, 2014.

[3] E. Fornasini, G. Marchesini. Doubly indexed dynamical systems: state models and structural properties. *Mathematical Systems Theory*, 12:59–72, 1978.

[4] K. Galkowski, M. Emelianov, P. Pakshin, E. Rogers. Vector lyapunov functions for stability and stabilization of differential repetitive processes. *J. Computer Syst. Sci. International*, 55:503–514, 2016.

[5] S. Knorn, R.H. Middleton. Asymptotic and exponential stability of nonlinear two-dimensional continuous-discrete Roesser models. *Systems & Control Letters*, 93:35–42, 2016.

[6] J. Kurek. Stability of nonlinear time-varying digital 2-D Fornasini-Marchesini system. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 1–10, 2012.

[7] P. Pakshin, J. Emelianova, K. Galkowski, E. Rogers. Exponential stability and stabilization of nD systems. *In Proccedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, 4375–4380, 2015.

[8] P. Pakshin, J. Emelianova, K. Galkowski, E. Rogers. Stabilization of nonlinear 2D Fornasini-Marchesini and Roesser systems. *Proc. 9th Int. Workshop on Multidimensional (nD) systems*, 1—6, 2015.

[9] P. Pakshin, K. Galkowski, E. Rogers. Stability and stabilization of systems modeled by 2D nonlinear stochastic Roesser models. *Proc. 7th Int. Workshop on Multidimensional (nD) systems*, 1—6, 2011.

[10] R.P. Roesser. A discrete state space model for image processing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 20(1):1–10, 1975.

[11] E. Rogers, K. Galkowski, D. H. Owens. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes*. Springer (Lecture Notes in Control and Information Sciences), 2007.

[12] N. Yeganefar, N. Yeganefar, M. Ghamgui, E. Moulay. Lyapunov theory for 2-D nonlinear Roesser models: Application to asymptotic and exponential stability. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 58:1299—1304, 2013.

Asymptotic stability of 2D nonlinear Roesser systems

Julia P. Emelianova
Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University (Arzamas, Russia)

Abstract. The paper consider the development of a stability theory for 2D nonlinear discrete systems described by a state-space model of the Roesser form, based on an extension of the Lyapunov's method. Using vector Lyapunov function and its divergence (or discrete counterpart thereof), new conditions for asymptotic stability are derived in terms of properties of two vector Lyapunov functions. These results are also extended to stochastic case.

Keywords: 2D systems, Roesser systems, asymptotic stability, vector Lyapunov function.