

Итерационные алгоритмы построения оптимальных упаковок в неоднородной метрике

П.Д. Лебедев
ИММ УрО РАН (Екатеринбург)
pleb@yandex.ru

А.А. Лемперт
Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН
(Иркутск)
lempert@icc.ru

Аннотация

Рассматривается задача об упаковке «кругов» в выпуклые компактные множества на плоскости. Расстояние между точками считается равным времени, за которое волна в неоднородной среде проходит от одной точки до другой. Считается, что на компактном множестве задана метрика специального вида, называемая вариационной. Критерием оптимальности упаковки выбран радиус «кругов» при фиксированном их числе. Используются вычислительные методы конструирования границ «кругов» как волновых фронтов на базе принципов геометрической оптики. Для максимизации их радиуса применяются итерационные алгоритмы, имитирующие отталкивание центров кругов от границ соседних с ними элементов упаковки и от границы выпуклого множества. В них применяются конструкции чебышевского центра, позволяющие сформировать вектор сдвига в нужном направлении. Разработан программный комплекс. Проведено численное моделирование ряда примеров для множеств различной геометрии и при различном распределении скоростей распространения волны на плоскости. Выполнена визуализация результатов.

1 Введение

При решении разного рода прикладных задач часто требуется заменить множество со сложной структурой набором более простых однотипных объектов. Одним из наиболее распространенных вариантов такой замены является аппроксимация ограниченного множества объединением заданного числа шаров равного радиуса в различных метрических пространствах.

Задача об упаковке возникает при решении широкого спектра производственных задач [1], а также в транспортной и инфраструктурной логистике [2]. Ее исследованию в классической постановке (упаковка в подмножество евклидова пространства) посвящено большое количество работ, см. например, [3–7]. Вместе с тем изучаются задачи, в которых метрика задается некоторым специальным образом. Так, в работах [8, 9] представлено решение задачи расстановки сфер равных радиусов в двухмерных, трехмерных

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at <http://ceur-ws.org>

пространствах постоянной кривизны (гиперболическом и эллиптическом) так, чтобы их плотность была наибольшей. Кроме этого, данная проблема исследовалась в цикле работ Дж. Жирмая (J. Szirmai): в [10] описан способ построения оптимальной упаковки шаров для черепицы Коксетера (Coxeter tiling) в гиперболическом трехмерном пространстве, в [11] предложен метод, основанный на проективной интерпретации гиперболической геометрии, в [12] расширена задача нахождения наиболее плотной геодезической упаковки шаров для 3-мерных геометрий Терстона (Thurston geometries). Авторами ранее в основном исследовалась задача о покрытии [13], задача об упаковке рассматривалась применительно к правильным многоугольникам и кругам на плоскости [14] и правильным многогранникам в трехмерном пространстве [15].

В данной статье мы изучаем круги в метрическом пространстве, в котором расстояние между точками определяется временем распространения сигнала в неоднородной среде. Это обусловлено широким классом практических задач, в которых приходится иметь дело с расположением объектов в условиях различных факторов, изменяющих радиус их зон действия. В случае логистических центров это может быть ландшафт местности, наличие водных преград или лесных массивов [16]. В случае узлов связи их роль могут играть особенности распространения излучения в различных слоях атмосферы [17].

2 Постановка задачи

Рассмотрим компактное множество $D \subset \mathbf{R}^2$, расстояние между точками \mathbf{a} и \mathbf{b} которого задано следующим образом:

$$\rho_f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\Gamma \in \Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y)}. \quad (1)$$

Здесь $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная на множестве D , на которую наложено условие

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) > 0, \quad (2)$$

$\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — множество спрямляемых кривых (под кривой понимаем непрерывный образ отрезка), соединяющих \mathbf{a} и \mathbf{b} и вложенных в D . В случае $f(x, y) \equiv 1$ расстояние совпадает с евклидовым. Формула (1) задает метрику на множестве D , которую мы будем называть вариационной. Она ставит в соответствие любой паре точек \mathbf{a} и \mathbf{b} из D неотрицательное число, равное минимальному времени прохождения сигнала от точки \mathbf{a} до \mathbf{b} в среде, при котором скорость его распространения равна $f(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in D$. Обозначим в этом метрическом пространстве замкнутый «шар» с центром в точке \mathbf{x} радиуса $r > 0$ как $O_f(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2: \rho_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}$. Условие (2) гарантирует, что «шары» с меньшим радиусом будут строго вложены в «шары» с большим. Кроме того, данное условие вместе с непрерывностью функции $f(x, y)$ позволяет утверждать, что на компакте D функция $f(x, y)$ достигает своего минимального значения K_{\min} и $K_{\min} > 0$. Поэтому для любой спрямляемой кривой $\Gamma \subset D$ интеграл $\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y)}$ равен конечному положительному числу.

Определение 1. Упаковкой U_n компактного множества $M \subset X$ из n шаров радиуса r называется объединение $O_f(\mathbf{x}_1, r) \cup O_f(\mathbf{x}_2, r) \cup \dots \cup O_f(\mathbf{x}_n, r)$ из n шаров, для которых выполняются условия

$$\forall i = \overline{1, n} \quad O_f(\mathbf{x}_i, r) \subseteq M,$$

$$\forall i \neq j \quad \text{int } O_f(\mathbf{x}_i, r) \cap \text{int } O_f(\mathbf{x}_j, r) = \emptyset.$$

Здесь int означает объединение внутренних точек множества. Таким образом, набор шаров равного радиуса является упаковкой множества M в том случае, если все они вложены в M и никакие два шара не имеют общих внутренних точек. Поскольку в данной работе рассматриваются метрические пространства размерности два (то есть плоскости), будем далее именовать шары «кругами».

Обозначим множество всех упаковок множества M , состоящих из n кругов, через $\Upsilon_n(M)$. Ограничимся далее рассмотрением выпуклых множеств [18] ненулевой площади.

Задача 1. Пусть задано ограниченное замкнутое выпуклое множество M и число $n \in \mathbf{N}$. Требуется найти упаковку $U_n^* \in \Upsilon_n(M)$, радиус r^* кругов которой был бы максимальным.

Метрика (1) возникает в задачах транспортной и инфраструктурной логистики [16]. Например, если требуется определить оптимальное размещение фиксированного числа n логистических центров (складов, магазинов) в случае, когда потребители распределены непрерывно, но неравномерно. Если считать все объекты точками, то можно формализовать задачу 1 в геометрических терминах.

3 Принципы решения задачи

В случае конкретной вариационной метрики задача 1 сводится к следующему виду.

Пусть задано компактное множество M , функция $f(x, y)$ с областью определения $D \supseteq M$ и число $n \in \mathbf{N}$. Требуется найти такой набор из n точек $S_n = \{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n$, $S_n \subset M$, при котором величина

$$R_M(S_n) = \min_{i=\overline{1, n}} \min \left\{ \frac{h_f(\mathbf{s}_i, (S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}))}{2}, h_f(\mathbf{s}_i, \partial M) \right\} \quad (3)$$

будет максимальной среди всех возможных наборов. Здесь $h_f(\mathbf{x}, M) = \min\{\rho_f(\mathbf{x}, \mathbf{m}) : \mathbf{m} \in M\}$ — расстояние от точки \mathbf{x} до множества M в вариационной метрике (1), ∂M — граница множества M .

Для решения задачи 1 авторами предлагается метод, основанный на аналогии между распространением света в оптически неоднородной среде и нахождением минимума интегрального функционала (оптико-геометрический подход) [2, 16]. Известно, что свет в своем движении выбирает путь, который проходит за минимальное время (принцип Ферма), а также, что каждая точка, которой свет достиг, сама, в свою очередь, становится вторичным источником света (принцип Гюйгенса), см. [19].

Фронт световой волны в любой момент времени представляет собой сферу в метрическом пространстве с метрикой (1), где $f(x, y)$ — оптическая проницаемость среды (локальная скорость света в соответствующей точке), а множество «освещенных» точек — ограниченный ею «шар» (на плоскости — «круг»). При этом радиус «круга» с течением времени, вообще говоря, увеличивается. В терминах теории управления эти «круги» являются множествами достижимости [20] динамической системы, вектограмма скоростей которой в каждой точке (x, y) рассматриваемого участка плоскости совпадает с кругом радиуса $f(x, y)$ с центром в начале координат.

Для удобства при построении алгоритмов решения задач 1 формулу (3) можно записать в виде

$$R_M(S_n) = \min_{i=\overline{1, n}} \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \quad (4)$$

где

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \min \left\{ \frac{1}{2} \min_{j=\overline{1, n} (j \neq i)} \rho_f(\mathbf{x}, \mathbf{s}_j), h_f(\mathbf{x}, \partial M) \right\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Соответственно, процесс отыскания множества S_n центров шаров упаковки можно свести к поэтапной максимизации функций $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, n}$, на множестве M . При этом i меняется от 1 до n , точки $S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}$ считаются фиксированными, а \mathbf{s}_i строится как точка локального максимума функции (5) при заданном i .

Можно показать, что максимизацию радиуса кругов упаковки можно свести к циклической коррекции координат отдельных точек. При изменении одной точки \mathbf{s}_i из всей n -сети S_n достаточно требовать, чтобы увеличивалась величина $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$.

Предложение 1. Пусть заданы компакт M , две n -сети $S_n = \{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n \subset M$ и $\widehat{S}_n = \{\widehat{\mathbf{s}}_i\}_{i=1}^n \subset M$ и натуральное число $i^* \leq n$ такие, что

$$\forall i = \overline{1, n} (i \neq i^*) \quad \mathbf{s}_i = \widehat{\mathbf{s}}_i, \quad \mathbf{s}_{i^*} \neq \widehat{\mathbf{s}}_{i^*}.$$

Если выполняется неравенство

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \min_{i=\overline{1, n} (i \neq i^*)} \rho_f(\mathbf{s}_{i^*}, \mathbf{s}_i), h_f(\mathbf{s}_{i^*}, \partial M) \right\} \leq \min \left\{ \frac{1}{2} \min_{i=\overline{1, n} (i \neq i^*)} \rho_f(\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}, \mathbf{s}_i), h_f(\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}, \partial M) \right\}, \quad (6)$$

то выполняется и

$$R_M(\widehat{S}_n) \geq R_M(S_n). \quad (7)$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\widehat{\varphi}^{(i)}(\mathbf{x}) = \min \left\{ \frac{1}{2} \min_{j=\overline{1, n} (j \neq i)} \rho_f(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{s}}_j), h_f(\mathbf{x}, \partial M) \right\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

По построению

$$R_M(\widehat{S}_n) = \min_{i=\overline{1, n}} \widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i).$$

Рассмотрим, как могут соотноситься величины $\widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i)$ и $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$ при $i = \overline{1, n}$. По условиям предложения и из неравенства (6) следует

$$\widehat{\varphi}^{(i^*)}(\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}) \geq \varphi^{(i^*)}(\mathbf{s}_{i^*}).$$

Допустим, для некоторого $i^0 \neq i^*$ имеет место

$$\widehat{\varphi}^{(i^0)}(\widehat{\mathbf{s}}_{i^0}) < \varphi^{(i^0)}(\mathbf{s}_{i^0}).$$

Поскольку все точки S_n и \widehat{S}_n , кроме одной, совпадают, то это может быть только в том случае, если точка $\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}$ в рассматриваемой вариационной метрике находится ближе к $\widehat{\mathbf{s}}_{i^0}$, чем \mathbf{s}_{i^*} и чем все точки из $\widehat{S}_n \setminus \{\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}, \widehat{\mathbf{s}}_{i^0}\}$. И в этом случае

$$\widehat{\varphi}^{(i^0)}(\widehat{\mathbf{s}}_{i^0}) = \frac{\rho_f(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{s}}_{i^*})}{2}.$$

Но из определения функции (8) следует неравенство

$$\widehat{\varphi}^{(i^*)}(\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}) \leq \frac{\rho_f(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{s}}_{i^*})}{2}.$$

Поэтому выполняется оценка

$$\widehat{\varphi}^{(i^0)}(\widehat{\mathbf{s}}_{i^0}) \geq \widehat{\varphi}^{(i^*)}(\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}).$$

Значит, для любой точки с номером i выполняется одна из двух оценок:

$$\widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) \geq \varphi^{(i^*)}(\mathbf{s}_{i^*}) \quad (9)$$

либо

$$\widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i). \quad (10)$$

Из определения (4) величины $R_M(S_n)$ следует, что $\forall i = \overline{1, n} \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) \geq R_M(S_n)$. Поэтому из (9) и (10) можно записать

$$\forall i = \overline{1, n} \quad \widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) \geq R_M(S_n).$$

Из данных неравенств следует оценка (7).

4 Численные методы построения упаковок

4.1 Построение аппроксимаций «кругов» в метрическом пространстве

Первым шагом к решению задачи 1 является нахождение величины (3) и построение кругов упаковки максимального радиуса при некотором заданном наборе точек S_n . Естественно, аналитически это возможно только при очень простом виде функции f . Поэтому авторами разработан численный алгоритм генерации волнового фронта, аппроксимирующего границу «круга» $\mathcal{O}_f(\mathbf{s}, R)$ радиуса R . Строятся для каждой точки из S_n наборы фронтов $\Phi^{(j)} = \Phi(jd_r)$, аппроксимирующие границы кругов в рассматриваемом метрическом пространстве с заданным шагом d_r по радиусу.

Схема алгоритма построения границ «кругов» с центром в точке \mathbf{s} .

- Вначале задается точка \mathbf{s} , число разбиений фронта N_p , число фронтов N_Φ и шаг по длине при построении фронта d_r (чтобы выполнялось равенство $R \approx N_\Phi d_r$).

- Номер текущего фронта устанавливается $i := 1$.

- Вычисляется значение функции $r_0 = f(\mathbf{s})$ и строится окружность $\mathcal{O}(\mathbf{s}, r_0 d_r)$ (радиуса $r_0 d_r$ с центром в \mathbf{s}). На ней выделяется набор из N_p , расположенных на ней равномерно. Набор из отрезков, соединяющих точки (с соседними вдоль окружности), принимается за фронт $\Phi^{(1)}$.

- Выполняется инкремент номера текущего фронта $i := i + 1$.

- Для каждой из точек $\mathbf{p}_j^{(i-1)}$, $j = \overline{1, N_p}$ фронта $\Phi^{(i-1)}$ строится окружность $\mathcal{O}_j = \mathcal{O}(\mathbf{p}_j^{(i-1)}, r_d f(\mathbf{p}_j^{(i-1)}))$ с центром в ней, радиусом $r_d f(\mathbf{p}_j^{(i-1)})$.

- На массиве окружностей $\{\mathcal{O}_j: j = \overline{1, N_p}\}$ выделяются точки, лежащие на его границе. Затем на них строится ломаная $[\mathbf{p}_1^{(i)}, \mathbf{p}_2^{(i)}], [\mathbf{p}_2^{(i)}, \mathbf{p}_3^{(i)}], \dots, [\mathbf{p}_{N_p-1}^{(i)}, \mathbf{p}_{N_p}^{(i)}], [\mathbf{p}_{N_p}^{(i)}, \mathbf{p}_1^{(i)}]$, которая принимается за фронт $\Phi^{(i)}$.

Последние три пункта повторяются до тех пор, пока номер фронта не достигнет N_Φ .

При некотором заданном начальном расположении точек S_n программный комплекс выполняет моделирование распространения волновых фронтов до тех пор, пока волновой фронт от каждой из точек не

пересечется с волновым фронтом, порожденным каждой из $n - 1$ других точек и с границей ∂M фигуры M . После этого для каждой точки \mathbf{s}_i , $i = \overline{1, n}$, строится массив $P^{(i)} = \{\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{p}_i^*\}$ точек, содержащих все точки $\mathbf{p}_{i,j}$ пересечения «кругов» с центрами в точке \mathbf{s}_i и в точке \mathbf{s}_j , $j = \overline{1, n}$ ($j \neq i$), минимального радиуса, имеющих общую точку, и точки \mathbf{p}_i^* пересечения «круга» с центром в точке \mathbf{s}_i и границы ∂M фигуры M , минимального радиуса. Затем по формулам (5) вычисляются максимальные радиусы «кругов», которые обеспечивает их расположение без пересечения по внутренним точкам и не выходящее за пределы фигуры M . По формуле (4) вычисляется радиус «кругов» упаковки в данном метрическом пространстве.

4.2 Методы максимизации радиуса

Авторы развивают методы поэтапной коррекции координат точек n -сети S_n с целью увеличения значения радиуса (3), предложенные в работах [14, 15]. Их основу составляет идеология сдвига точек в направлении, обеспечивающем возрастание функции $R_M(S_n)$. Для этого циклически изменяются координаты точек \mathbf{s}_i с целью максимизации значения $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$ при изменении i от 1 до n . Согласно доказанному предложению если при этом значение $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$ увеличивается, то $R_M(S_n)$, по крайней мере, не уменьшается.

Определение 2. Чебышевским центром [21] компактного множества $M \subset \mathbf{R}^2$ называется такая точка $\mathbf{c}(M)$, что

$$\sup_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{c}(M) - \mathbf{m}\| = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2} \sup_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|. \quad (11)$$

Численные методы вычисления $\mathbf{c}(M)$ и величины (11) для случая, когда множество M представляет из себя набор из большого (но конечного) числа точек, предложены, например, в [22, 23].

Схема коррекции координат точки $\mathbf{s}_i \in S_n$.

- Устанавливаются параметры r_z (радиус слоя точек, которые участвуют в формировании сдвига), k_z (коэффициент величины сдвига).
- Строится множество точек $P^{(i)} = \{\mathbf{p}_j: j = \overline{1, n} (j \neq i)\}$ пересечения «кругов» минимального радиуса с центром в точке \mathbf{s}_i с «кругами» того же радиуса с центрами в точках из $S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}$.
- На границе Γ выделяется ближайшая в вариационной метрике к \mathbf{s}_i точка \mathbf{p}_0 (в случае если таких точек несколько, берется произвольная из них) и вычисляется величина $\rho_f(\mathbf{s}_i, \mathbf{p}_0)$.
- Строятся кривые $\Gamma_j \in \Gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{p}_j)$, $j = \overline{0, n}$ ($j \neq i$), на которых достигается минимум (1) времени распространения волны от точки \mathbf{s}_i до точек \mathbf{p}_j , $j = \overline{0, n}$ ($j \neq i$).
- Строятся предельные значения \mathbf{v}_j касательного вектора на каждой из кривой Γ_j , $j = \overline{0, n}$ ($j \neq i$) в точке \mathbf{g} при $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{s}_i$ (параметризация кривой считается заданной от точки \mathbf{p}_j в сторону \mathbf{s}_i).
- Строится предельное значение \mathbf{v}_0 касательного вектора на каждой из кривой Γ_0 в точке \mathbf{g} при $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{s}_i$ (параметризация кривой считается заданной от точки $\overline{\mathbf{p}}_j$ в сторону \mathbf{s}_i).
- Строится массив $W = \{\mathbf{w}_j: j = \overline{0, n} (j \neq i)\}$ векторов, сонаправленных \mathbf{v}_j ,

$$\mathbf{w}_j = \frac{R_j \mathbf{v}_j}{\|\mathbf{v}_j\|}, \quad j = \overline{0, n} (j \neq i),$$

длина которых зависит от расстояния в вариационной метрике между точками по закону

$$R_j = \begin{cases} \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + r_z - \rho_f(\mathbf{s}_i, \mathbf{p}_j), & \text{если } \rho_f(\mathbf{s}_i, \mathbf{p}_j) < \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + r_z, \\ 0, & \text{если } \rho_f(\mathbf{s}_i, \mathbf{p}_j) \geq \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + r_z, \end{cases} \quad j = \overline{0, n} (j \neq i).$$

- Строится чебышевский центр $\mathbf{c}(W)$ массива векторов W , то есть центр круга наименьшего радиуса, в который вложено W .
- В качестве новой точки $\widehat{\mathbf{s}}_i$ берется

$$\widehat{\mathbf{s}}_i = \mathbf{s}_i + k_z \mathbf{c}(W).$$

Данный алгоритм применяется ко всем точкам сети, после чего выполняется оценка, насколько сильно они сдвинулись. Затем цикл построения «кругов» и их сдвига выполняется программным комплексом многократно. Похожие схемы, например «метод возможных направлений» и «метод проекции градиента» описаны, например, в [24, гл. 4].

5 Результаты моделирования

Авторами создан программный комплекс в пакете MATLAB, реализующий представленные выше алгоритмы. Он позволяет вычислять аппроксимации наилучших упаковок для плоских множеств и проводить их визуализацию.

Пример 1. Требуется решить задачу 1 при $n = 8$ и $n = 9$ для множества

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: (x - 6)^2 + (y - 6)^2 \leq 4^2\}, \quad (12)$$

представляющего из себя круг, и функции среды

$$f(x, y) = x/5 + 0.5. \quad (13)$$

Заметим, что функция (13) может принимать любые значения на плоскости \mathbf{R}^2 , но на множестве (12) для нее выполняется оценка (2), а точнее $0.9 \leq f(x, y) \leq 2.5$. При $n = 8$ радиус «кругов» найденной оптимальной упаковки $r \approx 0.7721$. Массив координат центров кругов упаковки

$$S_8 \approx \{(5.0126, 6.011), (2.8055, 6.4609), (3.6723, 8.0304), (5.8033, 8.6995), \\ (8.0614, 6.8494), (7.1103, 3.8395), (3.0659, 4.7711), (4.5467, 3.4616)\}.$$

Упаковка показана на рис. 1, граница множества M обозначена зеленой линией, границы «кругов» $O_f(\mathbf{s}_i, r)$, $i = \overline{1, n}$, упаковки – синими линиями, центры \mathbf{s}_i , $i = \overline{1, n}$, «кругов» – красными маркерами.

При $n = 9$ радиус $r \approx 0.6993$. Массив координат центров кругов упаковки

$$S_9 \approx \{(2.7035, 5.7463), (3.9672, 6.8119), (3.2678, 4.2879), (4.79413, 2.587), \\ (5.3309, 5.323), (4.4932, 8.6412), (7.1346, 3.6612), (6.7605, 8.5607), (8.3641, 6.2522)\}.$$

Упаковка U_9 показана на рис. 2.

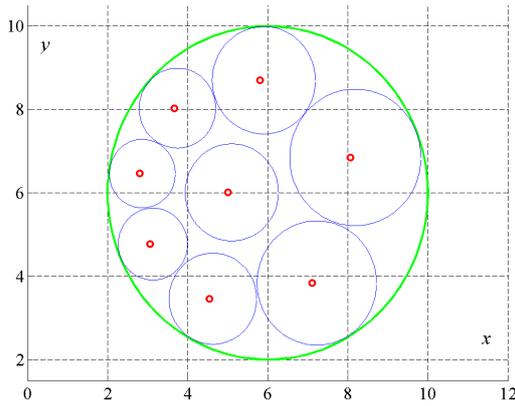


Рис. 1: Аппроксимация U_8 наилучшей упаковки круга M 8-ю «кругами» в примере 1.

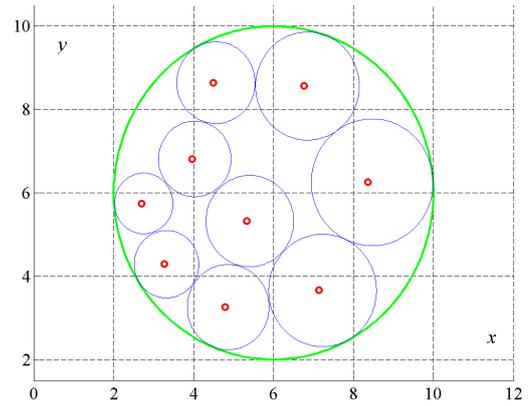


Рис. 2: Аппроксимация U_9 наилучшей упаковки круга M 9-ю «кругами» в примере 1.

Важной особенностью в рассматриваемом примере является то, что функция среды линейно зависит от координат. А значит, «круги» в рассматриваемом метрическом пространстве будут являться и кругами в обычном смысле (хотя геометрические центры кругов не совпадают с точками, из которых распространяется волна), подробнее см. [25].

Пример 2. Требуется решить задачу 1 при $n = 8$ и $n = 9$ для множества M , заданного формулой (12), и функции среды

$$f(x, y) = \frac{(y - 6)^2}{(y - 6)^2 + 1} + 0.5.$$

При $n = 8$ радиус «кругов» найденной оптимальной упаковки $r \approx 1.2681$. Массив координат центров кругов упаковки

$$S_8 \approx \{(6.6591, 5.9392), (8.8013, 6.5772), (3.6565, 7.004), (5.3429, 6.061),$$

$$(8.3442, 4.9963), (3.1992, 5.4226), (5.5174, 3.8168), (6.4838, 8.1829)\}.$$

Упаковка показана на рис. 3

При $n = 9$ радиус $r \approx 1.2408$. Массив координат центров кругов упаковки

$$S_9 \approx \{(3.9712, 5.7055), (6.6622, 5.9282), (4.1623, 7.5196), (7.3137, 7.9031), \\ (2.6583, 6.0678), (9.3284, 6.0565), (5.3684, 5.9526), (8.0186, 5.89), (5.9358, 3.7339)\}.$$

Упаковка U_9 показана на рис. 4.

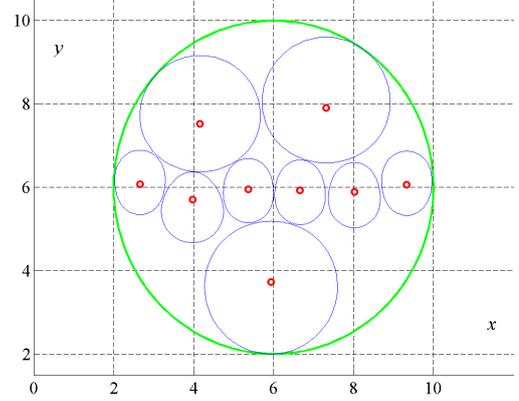
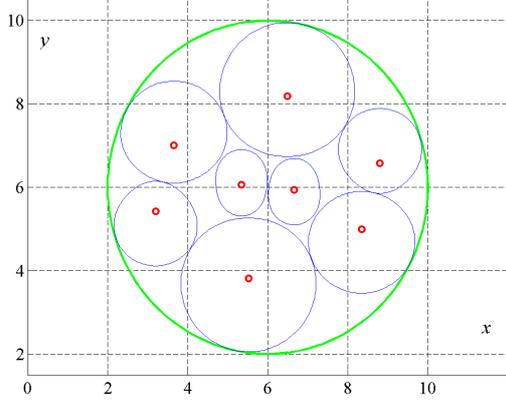


Рис. 3: Аппроксимация U_8 наилучшей упаковки круга M 8-ю «кругами» в примере 2.

Рис. 4: Аппроксимация U_9 наилучшей упаковки круга M 9-ю «кругами» в примере 2.

Особенностью среды в данном примере является то, что функция скорости распространения волны f зависит только от одной переменной, а значит среда является слоистой.

Пример 3. Требуется решить задачу 1 при $n = 8$ и $n = 9$ для множества M , заданного формулой (12), и функции среды

$$f(x, y) = \frac{(x - 4.5)^2 + (y - 6)^2}{(x - 4.5)^2 + (y - 6)^2 + 1} + 0.5.$$

При $n = 8$ радиус «кругов» найденной оптимальной упаковки $r \approx 0.8955$. Массив координат центров кругов упаковки

$$S_8 \approx \{(3.1499, 6.072), (5.7569, 3.2899), (6.5197, 5.5744), (4.5878, 5.1628), \\ (4.5779, 6.2958), (8.4302, 7.1732), (4.0616, 7.9897), (6.3879, 8.6889)\}.$$

Упаковка показана на рис. 5.

При $n = 9$ радиус $r \approx 0.8558$. Массив координат центров кругов упаковки

$$S_9 \approx \{(3.5650, 4.5002), (7.8021, 3.9141), (4.6788, 6.5617), (5.1534, 5.3721), \\ (7.0724, 8.5487), (5.4723, 3.2719), (4.7012, 8.4878), (3.1310, 6.4403), (7.0141, 6.1751)\}.$$

Упаковка показана на рис. 6.

Особенностью среды в данном примере является то, что функция скорости распространения волны f зависит только от расстояния до точки $(4.5, 6)$, а значит среда является радиальной.

Пример 4. Требуется решить задачу 1 при $n = 8$ и $n = 9$ для множества

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: 1 \leq x \leq 8, 2 \leq y \leq 9\},$$

представляющего из себя квадрат, и функции среды

$$f(x, y) = \frac{2}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2} + 0.5.$$

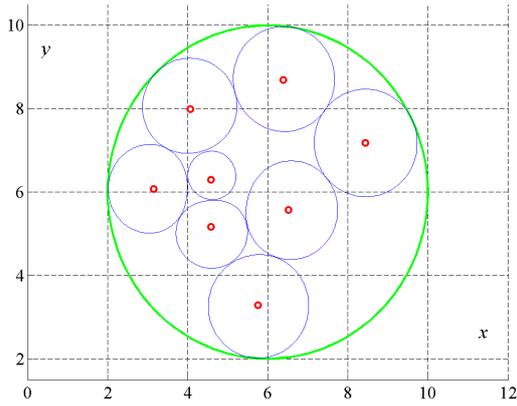


Рис. 5: Аппроксимация U_8 наилучшей упаковки круга M 8-ю «кругами» в примере 3.

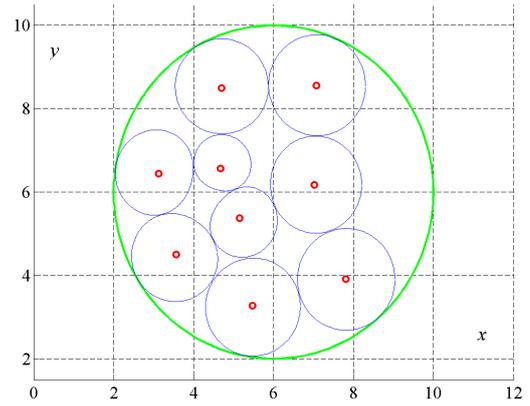


Рис. 6: Аппроксимация U_9 наилучшей упаковки круга M 9-ю «кругами» в примере 3.

При $n = 8$ радиус «кругов» найденной оптимальной упаковки $r \approx 1.9006$. Массив координат центров кругов упаковки

$$S_8 \approx \{(4.8645, 7.9352), (2.6399, 7.9129), (4.3113, 3.2968), (4.7116, 5.6964), \\ (6.7168, 3.1131), (2.2766, 5.5663), (6.9249, 5.2867), (6.9458, 7.4323)\}.$$

Упаковка показана на рис. 7.

При $n = 9$ радиус $r \approx 1.8024$. Массив координат центров кругов упаковки

$$S_9 \approx \{(2.6144, 3.6144), (2.1449, 6.0474), (2.9234, 8.0032), (5.2731, 3.0753), \\ (4.4675, 5.0805), (4.7398, 7.1234), (7.0059, 4.1942), (7.0173, 6.167), (6.4841, 8.0328)\}.$$

Упаковка показана на рис. 8.

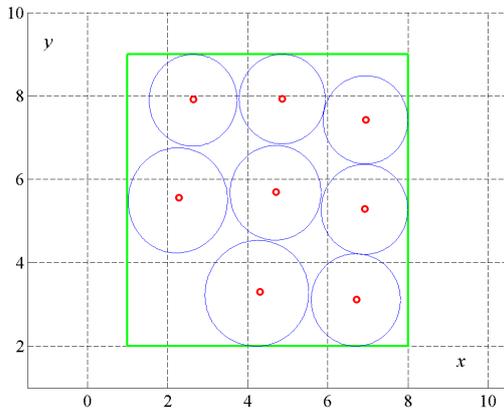


Рис. 7: Аппроксимация U_8 наилучшей упаковки квадрата M 8-ю «кругами» в примере 4.

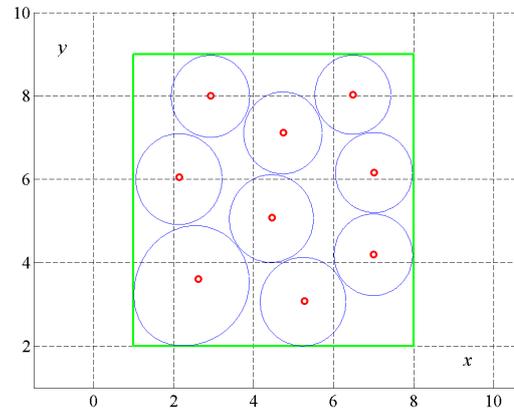


Рис. 8: Аппроксимация U_9 наилучшей упаковки квадрата M 9-ю «кругами» в примере 4.

В процессе построения упаковок в каждом примере параметры окончания работы программного комплекса были равны $dr = 0.02 \div 0.1$, $N_p = 50 \div 200$, $r_z = 0.05 \div 0.1$, $k_z = 0.5$. Для каждого из значений n было выполнено от 20 до 30 запусков с различными начальными значениями координат центров $S_n^{(0)}$. Общее число циклов программного комплекса варьировалось от 120 до 270.

6 Заключение

В работе предложены алгоритмы решения известной задачи об упаковке кругов равного радиуса в компактное множество в пространстве с неевклидовой метрикой специального вида. Их основой служат геометрические конструкции построения волновых фронтов, ломаных, аппроксимирующих оптимальные траектории, и чебышевского центра массива векторов, задающих направление сдвига точки.

Предложенные алгоритмы частично обоснованы и реализованы в виде программного комплекса. Многократный запуск вычислительного комплекса при различных начальных условиях, сгенерированных стохастическими методами, обеспечивает радиус кругов покрытия, достаточно близкий к максимально возможному.

Благодарности

Работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-31-00356-мол_а) и комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект №15-16-1-13.

Список литературы

- [1] I. Castillo, F. J. Kampas, J. D. Pinter. Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications. *European J. Operat. Research*, 191(3): 786–802, 2008.
- [2] A. L. Kazakov, A. A. Lempert. An approach to optimization in transport logistics. *Autom. Remote Control*, 72(7): 1398–1404, 2011.
- [3] E. G. Birgin, J. M. Gentil. New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips. *Comput. Operat. Research*, 37(7): 1318–1327, 2010.
- [4] S. I. Galiev, M. S. Lisafina. Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain. *European J. Operat. Research*, 203(3): 505–514, 2013.
- [5] I. Litvinchev, E. L. Ozuna. Integer programming formulations for approximate packing circles in a rectangular container. *Math. Prob. Engineer.* 3: 1–6, 2014.
- [6] C. O. Lopez, J. E. Beasley. A heuristic for the circle packing problem with a variety of containers. *European J. Operat. Research*, 214(3): 512–525, 2011.
- [7] J. P. Pedroso, S. Cunha, J. N. Tavares. Recursive circle packing problems. *Intern. Transact. Operat. Research*, 23(1): 355–368, 2014.
- [8] K. Boroczky. Packing of spheres in spaces of constant curvature. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 32(3): 243–261, 1978.
- [9] H. S. M. Coxeter. Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 5(3): 263–274, 1954.
- [10] J. Szirmai. The optimal ball and horoball packings of the Coxeter tilings in the hyperbolic 3-space. *Beitr. Algebra Geom.*, 46(2): 545–558, 2005.
- [11] J. Szirmai. The optimal ball and horoball packings to the Coxeter honeycombs in the hyperbolic d-space. *Beitr. Algebra Geom.*, 48(1): 35–47, 2007.
- [12] J. Szirmai. A candidate for the densest packing with equal balls in Thurston geometries. *Beitr. Algebra Geom.*, 55(2): 441–452, 2014.
- [13] V. N. Ushakov, P. D. Lebedev, A.S. Lakhtin. Optimization of the Hausdorff distance between sets in Euclidean space. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 291(S1): 222–238, 2015.
- [14] A. L. Kazakov, P. D. Lebedev. Algorithms of Optimal Packing Construction for Planar Compact Sets. *Numerical Methods and Programming. (Vychislitel'nye Metody i Programirovanie)*, 16(3): 307–317, 2015 (in Russian). = А.Л. Казаков, П.Д. Лебедев. Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости. *Вычислительные методы и программирование*, 16(3): 307–317, 2015.

- [15] P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii. Algorithms of optimal packing construction in a 3-dimensional Euclidian space. *MPMA 2016 – Proceedings of the 47th International Youth School-Conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, CEUR Workshop Proceedings*, 1662:84–93, 2016.
- [16] A. L. Kazakov, A. A. Lempert, D. S. Bukharov. On Segmenting Logistical Zones for Servicing Continuously Developed Consumers. *Autom. Remote Control*, 74(6): 968–977, 2013.
- [17] I. A. Zikratov, F. N. Shago, A. V. Gurtov, I. I. Ivaninskaya. Optimization of the coverage zone for a cellular network based on mathematical programming. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 15(2): 313–321, 2015. (in Russian) = И.А. Зикратова, Ф.Н. Шаго, А.В. Гуртов, И.И. Иванинская. Оптимизация зоны покрытия сети сотовой связи на основе математического программирования. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 15(2): 313–321, 2015.
- [18] K. Leichtweiss. *Konvexe Mengen*. Springer, Berlin, 1980.
- [19] Yu. A. Kravtsov, Yu. I. Orlov. *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*. Springer, Berlin, 1990.
- [20] N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, Optimal control in regular dynamical systems. *Russian Mathematical Surveys*, 20(3): 153–174, 1965.
- [21] A. L. Garkavi. On the Chebyshev center and convex hull of a set. *Uspekhi Mat. Nauk*, 19(6), 139–145, 1964.
- [22] A. F. Shorikov. An algorithm for solving problems on the a posteriori minimax estimation of the states of discrete dynamical systems. I. *Autom. Remote Control*, 57(7), 1016–1026, 1996.
- [23] A. F. Shorikov. An algorithm for solving problems on the a posteriori minimax estimation of the states of discrete dynamical systems. II. *Autom. Remote Control*, 57(9), 1335–1343, 1996.
- [24] E. Polak. *Computational Methods in Optimization. A Unified Approach*. Academic Press, New York–London, 1971.
- [25] E. D. Moskalensky. On detecting a wavefront described by a 2D eikonal equation when the velocity in the medium depends on one spatial variable. *Numer. Analys. Appl.*, 3(52): 52–58, 2010.

Iterative algorithms for optimal packing construction in inhomogeneous metrics

Pavel D. Lebedev¹, Anna A. Lempert²

1 – Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

2 – Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russia)

Keywords: packing, variative metric, maximization, Chebyshev center, wave front, trajectory.

The problem of packing of equal circles in the convex bounded 2-D sets is considered. The metric is significantly different from the Euclidean one. Here the distance between points is equal to the minimal time that requires for passing from one point to another. In other words, the shortest route between two points is a curve, to spend the least time. The optimality criterion for the packing is the radius of a fix number of circles. The proposed algorithm includes the computational method for constructing boundaries of packing circles as wave fronts, based on principles of geometric optics. To maximize the radius, we use the iterative procedures that simulate the repulsion of circle centers from the boundaries of adjacent packing elements and from the boundary of a convex set. They based on the Chebyshev center constructions, which make it possible to form a displacement vector in the required direction. Numerical modeling for the sets of different geometries and for the different distribution of wave propagation velocities is carried out. The results are visualized.