

# Анализ индуцированных шумом явлений в двумерной нейронной модели Рутькова

В.М. Насырова  
nasyrova.ven@yandex.ru

Л.Б. Ряшко  
Lev.Ryashko@urfu.ru

И.Н. Цветков  
itsvet@e1.ru

УрФУ (Екатеринбург)

## Аннотация

Для двумерной модели Рутькова нейронной активности исследуется явление стохастической возбудимости. Показано, что система даже при небольшой интенсивности шума может переходить из равновесного режима в режим стохастического берстинга. Данный феномен, обнаруженный прямым численным моделированием, исследуется с помощью техники функций стохастической чувствительности и метода доверительных областей. Эти методы позволяют выявить вероятностный механизм стохастического возбуждения берстовых колебаний и оценить пороговое значение интенсивности шума.

## 1 Введение

В настоящее время активно изучаются феномены, происходящие в нелинейных системах под воздействием случайных возмущений. К такому сорту систем можно отнести модели нейронной активности. Среди них можно выделить дискретную феноменологическую модель Рутькова [1]. Данная модель демонстрирует три основных типа нейронной активности: покой, спайкинг и берстинг. Динамика детерминированной модели Рутькова в зависимости от параметров была проанализирована в [2]. Одним из важных свойств нейрона является его возбудимость, приводящая к генерации всплесков (спайков). В модели Рутькова под воздействием случайных возмущений наблюдаются различные индуцированные шумом явления: индуцированные шумом переходы, индуцированный шумом порядок, индуцированный шумом хаос. Данные явления для одномерного варианта модели Рутькова были исследованы в [3, 4, 5]. Целью статьи является исследование индуцированных шумом явлений в более сложной двумерной нейронной модели Рутькова.

Для исследования стохастических явлений в нелинейных динамических системах широко применяется метод прямого численного моделирования. Однако в параметрическом анализе данный метод является слишком затратным. Одним из эффективных подходов в анализе стохастических аттракторов динамических систем является метод функции стохастической чувствительности (ФСЧ) и основанный на нем метод доверительных областей [6].

В данной работе показано, как метод ФСЧ можно эффективно применить для изучения вероятностных механизмов стохастического возбуждения берстовых колебаний в двумерной модели Рутькова. Детально исследован случай, когда такое возбуждение возможно даже в зоне устойчивого равновесия. Проведен статистический анализ этого явления с помощью функций плотности распределения случайных состояний и межспайковых интервалов.

---

*Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.*

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at <http://ceur-ws.org>

В разделе 2 дается описание техники ФСЧ. В разделе 3 представлены результаты анализа стохастической модели Рулькова.

## 2 Метод функции стохастической чувствительности

Рассмотрим детерминированную систему:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (1)$$

где  $x$  – вектор размерности  $n$ ,  $f(x)$  –  $n$ -вектор-функция.

Пусть система (1) имеет экспоненциально устойчивое равновесие  $\bar{x}$ .

Также вместе с детерминированной системой рассмотрим стохастическую систему:

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (2)$$

где  $\sigma(x_t)$  –  $(n \times n)$ -вектор-функция,  $\varepsilon$  – скалярный параметр, обозначающий интенсивность шума,  $\xi_t$  –  $n$ -мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами  $E\xi_t = 0$ ,  $E\xi_t \xi_t^T = I$  ( $I$  – единичная матрица размерности  $n \times n$ ).

Рассмотрим отклонение  $\Delta_t(\varepsilon) = x_t(\varepsilon) - \bar{x}$  решения  $x_t(\varepsilon)$  системы (2) от равновесия  $\bar{x}$  детерминированной системы (1) и вектор:

$$z_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta_t(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (3)$$

Для малых  $\varepsilon$  матрица  $V_t = E(z_t z_t^T)$  позволяет оценить дисперсию случайных состояний  $x_t(\varepsilon)$  вокруг детерминированного равновесия  $\bar{x}$ :  $E(\Delta_t(\varepsilon) \Delta_t^T(\varepsilon)) \approx \varepsilon^2 V_t$  [6].

Пусть  $x_t(\varepsilon)$  – решение системы (2) с начальным условием  $x_1(\varepsilon) = \bar{x} + \varepsilon z_1$ . Тогда для  $z_t$  будет справедлива следующая система:

$$z_{t+1} = F z_t + \sigma \xi_t, \quad (4)$$

где  $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ ,  $\sigma = \sigma(\bar{x})$ .

В этом случае матрицы вторых моментов  $V_t = E(z_t z_t^T)$  будут удовлетворять уравнению:

$$V_{t+1} = F V_t F^T + G, \quad G = \sigma \sigma^T \quad (5)$$

Так как  $\bar{x}$  устойчиво, то уравнение (5) имеет устойчивое стационарное решение  $W = \lim_{t \rightarrow \infty} V_t$ . Матрица  $W$  является единственным решением уравнения:

$$W = F W F^T + G \quad (6)$$

Матрица  $W$  называется матрицей стохастической чувствительности равновесия  $\bar{x}$ .

В двумерном случае доверительный эллипс вокруг равновесия  $\bar{x}$  задается уравнением:

$$(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x})) = 2\varepsilon^2 q^2, \quad (7)$$

где  $W$  – матрица стохастической чувствительности равновесия  $\bar{x}$ ,  $\varepsilon$  – интенсивность шума,  $q^2 = -\ln(1-P)$ ,  $P$  – доверительная вероятность.

## 3 Анализ стохастической возбудимости модели Рулькова

Рассмотрим стохастически возмущенную модель Рулькова:

$$\begin{cases} x_{t+1} = \frac{\alpha}{1 + x_t^2} + y_t + \varepsilon \xi_{1,t}, \\ y_{t+1} = y_t - \sigma x_t - \beta + \varepsilon \xi_{2,t} \end{cases}, \quad (8)$$

где  $x$  и  $y$  – быстрая и медленная динамические переменные,  $\alpha$ ,  $\sigma$  и  $\beta$  – некоторые положительные параметры,  $\varepsilon$  – интенсивность шума,  $\xi_{1,t}$  и  $\xi_{2,t}$  – независимые случайные величины, распределенные по закону Гаусса с параметрами  $E(\xi_{1,t}) = E(\xi_{2,t}) = 0$ ,  $E(\xi_{1,t}^2) = E(\xi_{2,t}^2) = 1$ . Следуя [1], будем рассматривать модель при фиксированных параметрах  $\sigma = \beta = 0.001$ .

Детерминированная модель Рулькова ( $\varepsilon = 0$ ) имеет единственное равновесие  $M(-1; -1 - \frac{\alpha}{2})$ . Матрица Якоби в этой точке будет иметь следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & 1 \\ -0.001 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равновесие  $M$  будет асимптотически устойчивым, когда собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $J$  будут удовлетворять неравенству  $|\lambda_{1,2}| < 1$ . Данное условие выполняется в интервале  $0 < \alpha < 1.998$ . Обозначим за  $\alpha^* = 1.998$ . При переходе параметра  $\alpha$  через точку  $\alpha^*$  в детерминированной модели Рулькова происходит бифуркация Неймарка-Сакера с рождением аттрактора нового типа - замкнутой инвариантной кривой. Эти новые аттракторы порождаются квазипериодическими решениями. По мере удаления от точки бифуркации размер соответствующих замкнутых инвариантных кривых увеличивается. При этом можно отметить резкий скачок амплитуды колебаний переменных  $x$  и  $y$  вблизи значения параметра  $\alpha = 1.999$ . Детали пространственных изменений аттракторов детерминированной системы в параметрической зоне  $0 < \alpha < 5$  представлены на рис. 1.

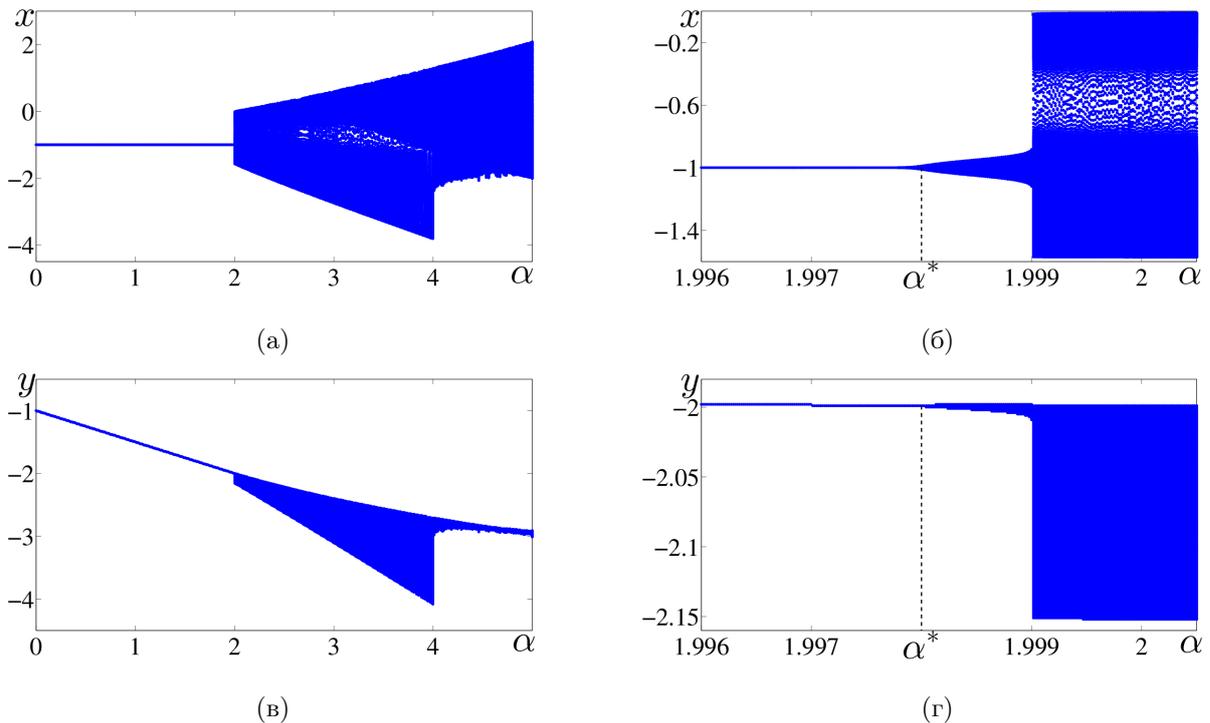


Рис. 1: Аттракторы детерминированной системы: (а, б) проекция на ось  $OX$  и (в, г) проекция на ось  $OY$ .

В данной работе наше внимание фокусируется на зоне параметра  $\alpha$ , расположенной в непосредственной близости и слева от точки бифуркации  $\alpha^* = 1.998$ .

На рис. 2 представлены фазовые портреты при  $\alpha = 1.9$  и  $\alpha = 1.99$ , построенные с помощью метода прямого численного моделирования. Видно, что фазовые траектории, отвечающие небольшим отклонениям начальных значений от устойчивого равновесия  $M$ , сразу стремятся к  $M$ , совершая осцилляции затухающей амплитуды. Однако, если начальное отклонение превосходит некоторый порог, то фазовая траектория сначала удаляется от равновесия, совершая большеамплитудный выброс, и только после этого переходного участка попадает в малую окрестность  $M$ , где уже продолжает асимптотическое приближение к равновесию. Малоамплитудные траектории соответствуют некоторой подпороговой зоне, а большеамплитудные - надпороговой.

Рассмотрим поведение модели Рулькова в зоне устойчивого равновесия под воздействием случайных возмущений. Для фиксированных значений  $\sigma = \beta = 0.001$  исследуем динамику системы при разных значениях параметра  $\alpha$  и интенсивности шума  $\varepsilon$ . На рис. 3(а,б) для  $\alpha = 1.9$  представлены стохастические траектории

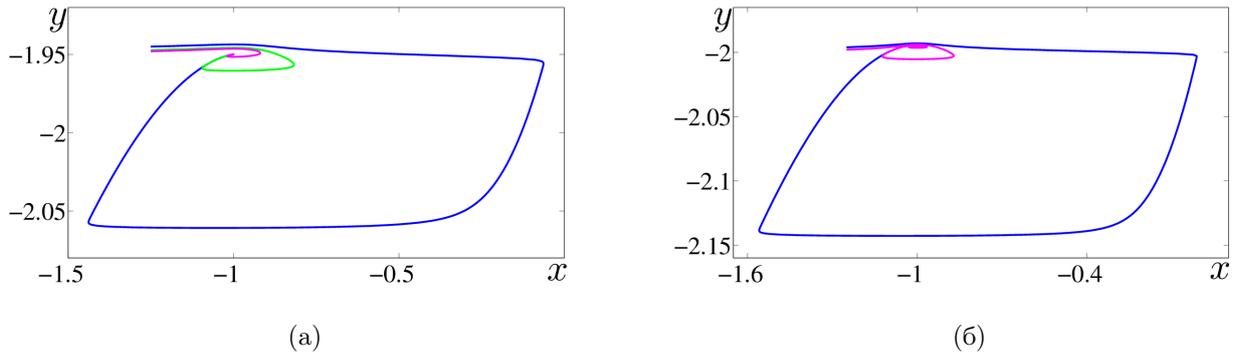


Рис. 2: Детерминированные фазовые портреты: (а)  $\alpha = 1.9$  и (б)  $\alpha = 1.99$ .

при двух различных значениях  $\varepsilon$ . Видно, что при небольшой интенсивности шума  $\varepsilon = 0.0001$  случайная траектория системы располагается вблизи устойчивого равновесия  $M$ , совершая малоамплитудные колебания. При увеличении интенсивности случайных возмущений дисперсия этих случайных осцилляций, естественно, возрастает. Однако, когда интенсивность шума превышает некоторое пороговое значение, характер стохастических колебаний резко меняется: в системе, наряду с малоамплитудными колебаниями, появляются случайные всплески больших амплитуд (рис. 3(а,б) для  $\varepsilon = 0.0004$ ). Таким образом, по мере увеличения интенсивности шума  $\varepsilon$ , система из равновесного режима (режима покоя) переходит в режим берстинга.

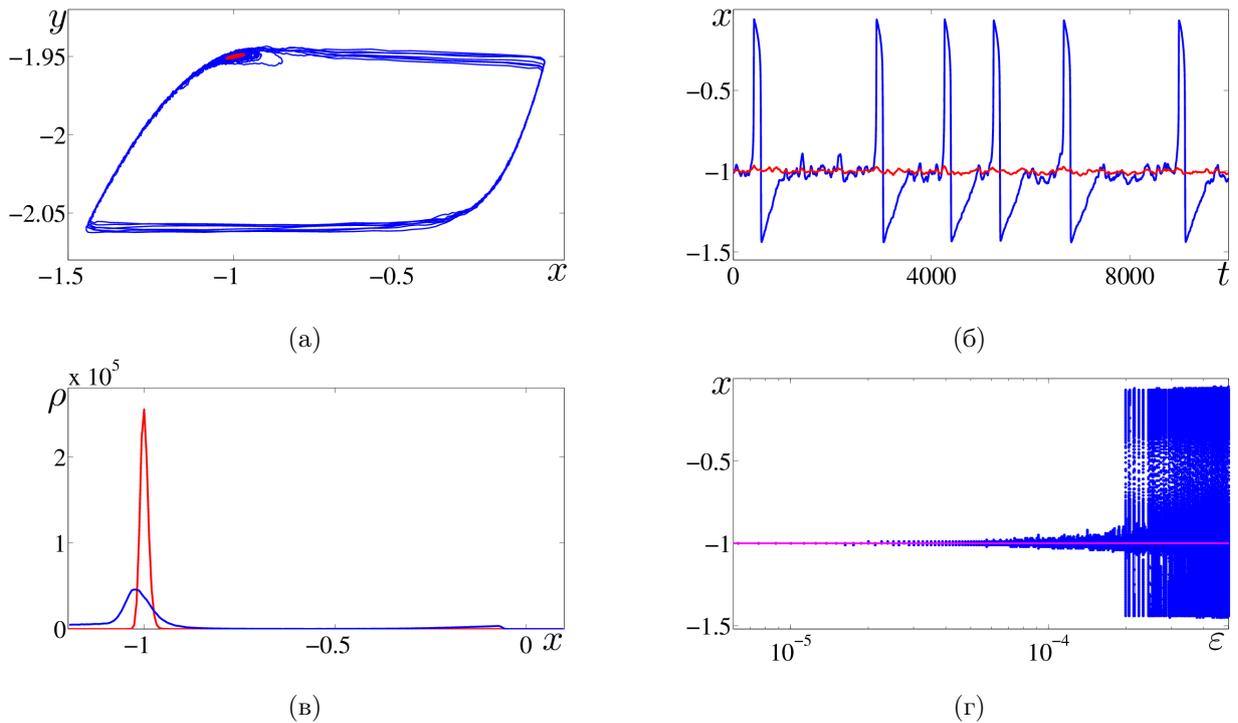


Рис. 3: (а) Аттракторы стохастической модели Рулькова для  $\alpha = 1.9$ : (красная линия)  $\varepsilon = 0.0001$ , (синяя линия)  $\varepsilon = 0.0004$ , (б) зависимость от временного параметра  $t$ , (в) плотность распределения случайных состояний системы и (г) зависимость от интенсивности шума  $\varepsilon$ .

Такая трансформация стохастической динамики системы сопровождается качественными изменениями плотности распределения случайных состояний. На рис. 3(в) для  $\alpha = 1.9$  представлены графики плотности распределения  $\rho(x)$  при этих двух значениях  $\varepsilon$ . Для  $\varepsilon = 0.0001$  кривая плотности имеет один узкий дельта-образный пик. При  $\varepsilon = 0.0004$  этот пик становится гораздо ниже и шире, и наряду с ним справа в графике

$\rho(x)$  появляется новый фрагмент с максимумом вблизи  $x = -0.1$ . Как видим, переход в берстовый режим осцилляций приводит к изменению формы плотности из унимодальной в бимодальную. Детали трансформации распределения состояний при увеличении интенсивности шума представлены на рис. 3(г). Здесь видно, что пороговое значение интенсивности шума как раз находится между  $\varepsilon = 0.0001$  и  $\varepsilon = 0.0004$ .

Такие же изменения в поведении системы наблюдаются при  $\alpha = 1.99$  (рис. 4). В этом случае уже при  $\varepsilon = 0.0001$  в системе наблюдается стохастический берстинг, тогда как при  $\alpha = 1.9$  наблюдалось стохастическое равновесие. Отсюда можно сделать вывод, что пороговое значение  $\varepsilon$  зависит от параметра  $\alpha$ : чем ближе параметр  $\alpha$  к точке бифуркации, тем меньше пороговое значение интенсивности шума.

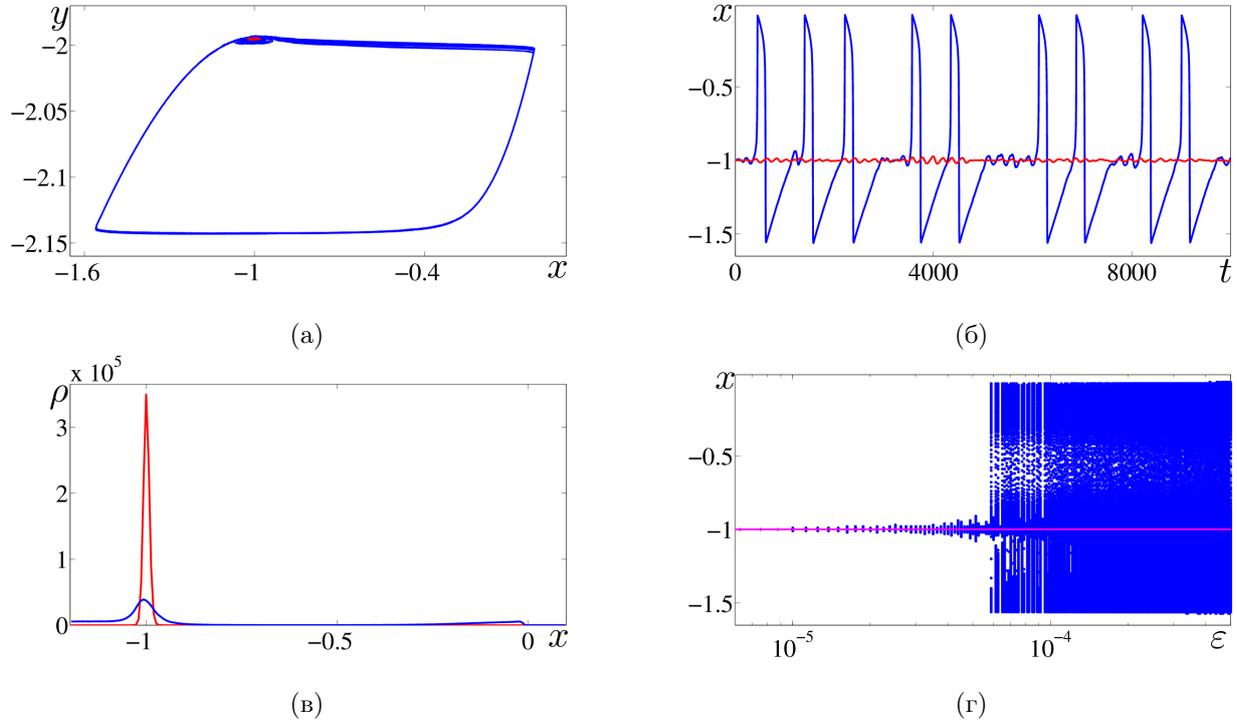


Рис. 4: (а) Аттракторы стохастической модели Рутькова для  $\alpha = 1.99$ : (красная линия)  $\varepsilon = 0.00002$ , (синяя линия)  $\varepsilon = 0.0001$ , (б) зависимость от временного параметра  $t$ , (в) плотность распределения случайных состояний системы и (г) зависимость от интенсивности шума  $\varepsilon$ .

Явление перехода от стохастического равновесия к берстингу также можно исследовать с помощью статистик межспайковых интервалов. На рис. 5 изображены графики зависимости среднего значения  $m$  межспайковых интервалов (рис. 5(а)) и коэффициента вариации  $C_v$  в зависимости от интенсивности шума  $\varepsilon$  (рис. 5(б)). Когда функция  $m(\varepsilon)$  резко уменьшается в системе начинает наблюдаться режим берстинга. Коэффициент вариации  $C_v(\varepsilon)$  является показателем периодичности спайков: чем меньше коэффициент вариации, тем более периодическими являются спайки.

Для подробного изучения данных явлений воспользуемся методом функции стохастической чувствительности (ФСЧ). В зоне  $0 < \alpha < 1.998$ , элементы матрицы  $W$  стохастической чувствительности устойчивого равновесия  $M$  будут следующие:

$$w_{11} = \frac{-10^6 \cdot (500\alpha + 1003)}{z} \quad w_{12} = w_{21} = \frac{1000(25 \cdot 10^4 \alpha^2 + 500\alpha - 1000001)}{z},$$

$$w_{22} = \frac{-125 \cdot 10^6 \alpha^3 + 24975 \cdot 10^4 \alpha^2 + 499999500\alpha - 1001001001}{z},$$

где  $z = (500\alpha - 999)(1000\alpha + 2001)$ . На рис. 6 представлена зависимость собственных чисел  $\mu_{1,2}$  матрицы  $W$  от параметра  $\alpha$  в зоне устойчивого равновесия. Видно, что при приближении параметра  $\alpha$  к точке бифуркации  $\alpha^*$  собственные числа матрицы  $W$  стремятся к  $+\infty$ .

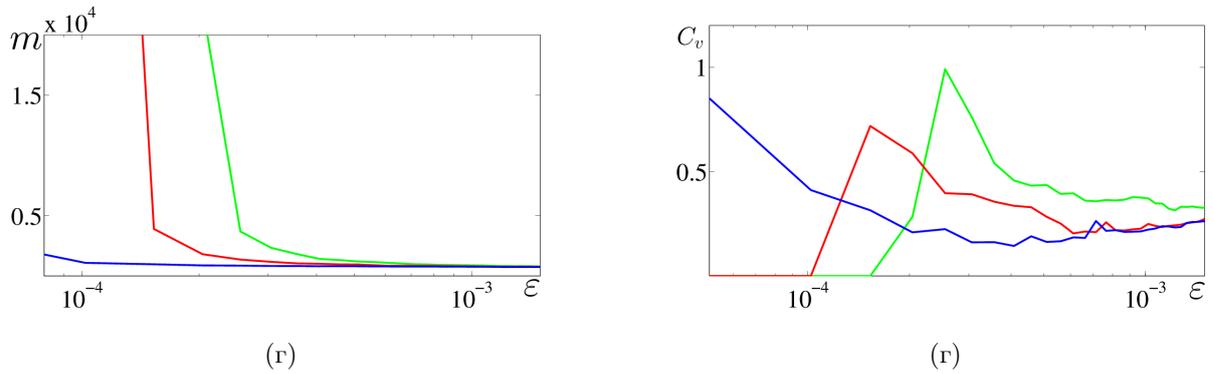


Рис. 5: (а) Зависимость математического ожидания от интенсивности шума, (б) зависимость коэффициента вариации от интенсивности шума ( $\alpha = 1.9$  - зеленая линия;  $\alpha = 1.94$  - красная линия;  $\alpha = 1.99$  - синяя линия).

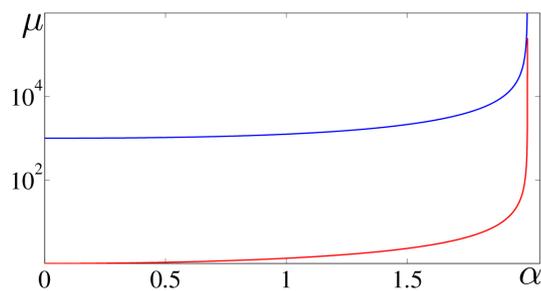


Рис. 6: Зависимость собственных чисел матрицы ФСЧ от параметра  $\alpha$  для зоны устойчивого равновесия.

На рис. 7 изображены случайные состояния системы (8) при  $\alpha = 1.9$  и  $\varepsilon = 0.0001$ , а также доверительный эллипс, построенный с помощью метода ФСЧ, с доверительной вероятностью  $P = 0.95$ . Видно, что результат прямого численного моделирования хорошо согласуется с результатами теоретического метода.

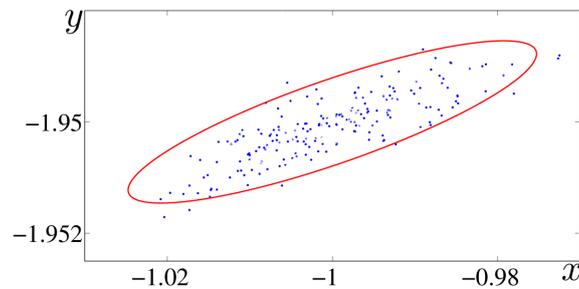


Рис. 7: Случайные состояния системы и доверительный эллипс при  $\alpha = 1.9$ ,  $\varepsilon = 0.0001$  и  $P = 0.95$ .

Рассмотрим взаимное расположение доверительных эллипсов и фазовых траекторий детерминированной модели Рутькова. На рис. 8(а) представлены фазовые траектории для параметра  $\alpha = 1.9$ , а на рис. 8(б) – для  $\alpha = 1.99$ . Вместе с фазовыми траекториями изображены доверительные эллипсы для разных интенсивностей шума, построенные с доверительной вероятностью  $P = 0.99$ . При низкой интенсивности шума  $\varepsilon$  доверительные эллипсы располагаются в некоторой подпороговой зоне. По мере увеличения шума эллипсы увеличиваются и начинают пересекать надпороговую зону, в которой случайные траектории стохастической системы Рутькова с высокой вероятностью совершают большеамплитудный выброс.

Анализируя все представленные графики, можно сделать вывод, что пороговое значение интенсивности шума для параметра  $\alpha = 1.9$  лежит в интервале  $(0.0001, 0.0004)$ , а для  $\alpha = 1.99$  – в интервале

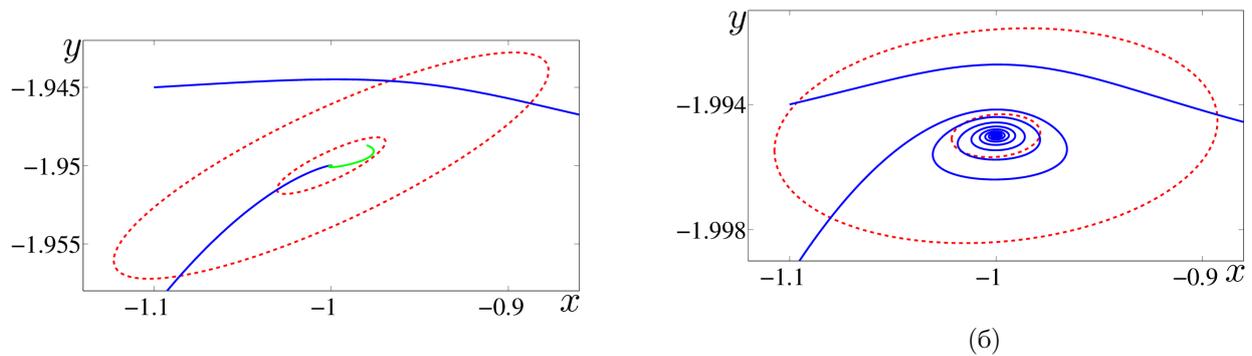


Рис. 8: Доверительные эллипсы и траектории детерминированной системы: (а)  $\alpha = 1.9$  и  $\varepsilon = 0.0001$  (малый),  $\varepsilon = 0.0004$  (большой); (б)  $\alpha = 1.99$  и  $\varepsilon = 0.00002$  (малый),  $\varepsilon = 0.0001$  (большой).

(0.00002, 0.0001).

Как видим, полученный методом доверительных эллипсов прогноз перехода системы из равновесного в берстовый режим хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования стохастических траекторий.

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10098).

## Список литературы

- [1] N. F. Rulkov. Regularization of Synchronized Chaotic Bursts. *Physical Review Letters*, 86(1):183–186, January 2001.
- [2] C. Wang, H. Cao. Parameter space of the Rulkov chaotic neuron model. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 19(6):2060–2070, June 2014.
- [3] I. Bashkirtseva. Stochastic Phenomena in One-Dimensional Rulkov Model of Neuronal Dynamics. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2015(495417):1–7, 2015.
- [4] I. A. Bashkirtseva, V. M. Nasyrova, L. B. Ryashko, I. N. Tsvetkov. Noise-induced intermittency and transition to chaos in the neuron Rulkov model. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 26(4):453–462, 2016 (in Russian). = И.А. Башкирцева, В.М. Насырова, Л.Б. Ряшко, И.Н. Цветков. Индуцированная шумом перемежаемость и переход к хаосу в нейронной модели Рулькова. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 26(4):453–462, 2016.
- [5] L. Ryashko, E. Slepukhina, V. Nasyrova. Noise-induced bursting in Rulkov model. *AIP Conference Proceedings*, 1773: 060006, 2016.
- [6] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 17(4):501–515, January 2010.

# The analysis of noise-induced phenomena in the two-dimensional neural Rulkov model

*Venera M. Nasyrova, Lev B. Ryashko, Ivan N. Tsvetkov*  
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

**Keywords:** stochastic sensitivity functions, stochastic excitability, Rulkov model.

The phenomenon of the stochastic excitability is investigated for the two-dimensional Rulkov model of neural activity. It is shown that the system can move from the equilibrium mode to a stochastic bursting even for the low noise intensity. This phenomenon is detected by the direct numerical simulation and investigated using the stochastic sensitivity functions technique and the method of confidence domains. These methods allow us to identify the probabilistic mechanisms of stochastic excitation of bursting, and to estimate the threshold value of the noise intensity.