Oszillierende Ladungen als Werkzeug für die Analyse von MR-Aufnahmen

Martin Haimerl

Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme
Arbeitsgruppe *Medizinische Bildverarbeitung* (Prof. Beth)
Universität Karlsruhe
Am Fasanengarten, 76128 Karlsruhe
Email: haimerl@ira.uka.de

Zusammenfassung. Der vorliegende Beitrag zeigt, wie Verteilungen oszillierender elektrischer Ladungen bzw. die zeitliche Entwicklung einer Ladungsdichte zur Extraktion geometrischer Formen in MR-Aufnahmen eingesetzt werden können. Die Evolution wird mathematisch durch eine Kontinuitätsgleichung beschrieben und numerisch auf implizite Weise über die Klein-Gordon-Gleichung gelöst, die auch in der angegebenen Diskretisierung eine Erhaltungsgröße in Form von Ladungen besitzt. Die Ermittlung deren Nulldurchgänge ergibt bei geeigneter bildabhängiger Initialisierung eine Separierung in zusammenhängender Teilobjekte.

Schlüsselwörter: Evolutionsgleichungen, Erhaltungsgrößen, Bildsegmentierung, Topologische Bildeigenschaften

1 Einleitung

Die Aufteilung eines Bildes in zusammenhängende Bereiche, die in der Bildanalyse ein ebenso wichtiger wie schwieriger Verarbeitungsschritt ist, korrespondiert in natürlicher Weise mit der Bestimmung der Ränder der zu separierenden Gebiete. Für die Segmentierung eines einzelnen Objekts läßt sich z.B. nach interaktiver Vorgabe initialer Kurven mit Hilfe von aktiven Konturen [4] ein möglicher Objektrand mittels Minimierung von Energiefunktionalen schrittweise approximieren. Derartige Techniken sind allerdings sehr rechenaufwendig und erfordern, daß die initialen Konturen insbesondere hinsichtlich ihrer topologischen Struktur gute Annäherungen an die zu extrahierenden Objekte darstellen. Wird die Evolution der Randkurven nicht mehr explizit sondern z.B. anhand der Isolinien einer Funktion (*level set methods* [5]) implizit beschrieben, so lassen sich topologische Veränderungen wesentlich leichter handhaben und zudem werden verschiedene Bildregionen parallel bearbeitet. Diese Methodik kann beispielsweise verwendet werden, um eine durch Kurven gleicher Helligkeit gegebene Bildaufteilung weiter zu verarbeiten und die Randkurven zu optimieren (siehe [3] als Überblick).

Der vorliegende Artikel stellt einen alternativen physikalisch motivierten Ansatz vor, bei dem sich die Gebietsaufteilung anhand „elektrischer" Ladungen ergibt. Die Vorzeichen dieser Ladungen dienen der Markierung separierter Regionen, die nach Einbringung konkurrierender Bildmerkmale als Ladungsträger für deren Trennung sorgt. Die Ladungen oszillieren, so daß sich gleichnamige Ladungen lokal konzentrieren und die Randkurven zusammenhängender Bildregionen anhand der Nulldurchgänge der Ladungsdichte bestimmt werden können. Neben der Analyse von Variationsmöglichkeiten für die Initialisierung wird eine numerische Umsetzung der Evolution vorgestellt, bei der zentrale Systemeigenschaften wie die Erhaltung der Gesamtladung von der kontinuierlichen Darstellung auf die diskrete Näherung übertragen werden. Anwendungen und Ergebnisse der Methodik werden anhand medizinischer MR-Aufnahmen präsentiert. Beginnen wollen wir aber mit der mathematischen Modellierung der Ladungsdichte und Konstruktion einer korrespondierenden Kontinuitätsgleichung.

2 Mathematische Modellierung

Im Gegensatz zu Verfahren, die lediglich die Helligkeit eines Bildpunktes untersuchen und sich in Ihrer mathematischen Modellierung auf reellwertige Funktionen beschränken, basiert die folgende Methodik auf der Analyse komplexwertiger Signale. (Wie sich die daraus ergebenden Freiheitsgrade für Bildverarbeitungszwecke ausnutzen lassen, wird später behandelt). Im weiteren sei daher

$$\psi(z) = \psi_R(z) + i\psi_I(z) = r(z)e^{i\phi(z)} \tag{1}$$

ein komplexwertiges Signal (Wellenfunktion) in einer räumlichen (vektoriellen) Variablen z, wobei der Realteil ψ_R, der Imaginärteil ψ_I, die Amplitude r und die Phase ϕ reellwertige Funktionen in z darstellen.

Die Phasenfunktion ϕ bzw. deren Gradient bildet einen geeigneten Ansatzpunkt für die Beschreibung der Ladungsdichte. Betrachtet man unendlich oft differenzierbare Funktionen, so läßt sich zeigen (siehe [1]), daß das Wegintegral

$$R(\psi, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{z_0}} (\nabla\phi)(z)dz = \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_{z_0}} \frac{\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi}{|\psi|^2}dz \tag{2}$$

über geschlossene orientierte Kurven Γ_{z_0} lediglich ganzzahlige Werte annimmt. (ψ^* bezeichnet die zu ψ komplex konjugierte Funktion). Für Kurven in einer hinreichend kleinen Umgebung des Bezugspunkts z_0 stellt dieser Wert die Ordnung einer in z_0 lokalisierten Singularität dar. Für Ordnungen ungleich null sind diese Singularitäten (z.B. in der Optik) als Speckles bekannt, in unserem Fall ist die Ordnung als Anzahl der in z_0 lokalisierten Elementarladungen zu interpretieren.

Um die Evolution dieser Ladungen zu beschreiben, führen wir zusätzlich eine zeitliche Abhängigkeit für ψ ein, die durch die Variable t als Ergänzung zur räumlichen Variable z charakterisiert wird. Mit der Einschränkung auf normierte Wellenfunktionen ψ läßt sich die folgende Kontinuitätsgleichung konstruieren

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho(z,t)}{\partial t} = \nabla j(z,t) \\ \text{mit } \rho(z,t) = \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\Big(\psi_R\frac{\partial\psi_I}{\partial t} - \psi_I\frac{\partial\psi_R}{\partial t}\Big) \\ \text{und } j(z,t) = \psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi,\end{gathered} \tag{3}$$

die die Ladungsdichte ρ mit einem Ladungsfluß j in Korrespondenz setzt. (Auf die Problematik der angesprochenen Renormierung wird in diesem Beitrag nicht näher eingegangen). Gleichung (3) läßt sich bzgl. der Komponenten ψ und ψ^* separieren und damit in die Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(z,t) - m^2 \psi(z,t) \tag{4}$$

übertragen. Die Funktion ψ^* erfüllt ebenfalls diese aus der relativistischen Quantenmechanik (siehe z.B. [2]) bekannte Gleichung, mit deren Hilfe (3) implizit gelöst werden kann. Der Übergang von ψ zu ψ^*, der gleichbedeutend ist mit einer zeitlichen Inversion, vertauscht lediglich das Vorzeichen der Ladungen. Aufgrund ihrer Linearität ist die Klein-Gordon-Gleichung (4) sowohl systemtheoretisch als auch numerisch wesentlich besser beherrschbar als (3) und wird deshalb als Ausgangspunkt für eine stabile Implementierung im Rahmen der Bildverarbeitung dienen. Man beachte, daß (4) Freiheitsgrade für ψ wie auch für deren zeitliche Ableitung $\partial\psi/\partial t$ enthält, die gezielt für Initialisierungen des zugehörigen Anfangswertproblems einsetzbar sind. Zudem ist anzumerken, daß (4) symmetrisch hinsichtlich Zeitumkehr ist und der durch (3) beschriebene Ladungsfluß somit einen reversiblen, informationserhaltenden Prozeß darstellt.

2.1 Initialisierung

Wie die Evolution über Initialisierungen gesteuert werden kann, läßt sich anhand lokaler Variationen der Phasenfunktion ϕ bzw. Ladungsdichte ρ demonstrieren. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften von (4) haben weder ein Vorzeichenwechsel von ϕ noch die Addition einer globalen Phase (Eichinvarianz) Einfluß auf die Entwicklung der Ladungsdichte. Stattdessen erzeugen lokale Variationen der Phase ein Potential, daß die Entwicklung der Wellenfunktion leitet. Initialisiert man ϕ z.B. anhand der Helligkeitswerte eines gegebenen Bildes (abgebildet wird auf eine Hälfte der möglichen Phasenwerte), so konzentrieren sich gleichnamige Ladungen gemäß des durch die Intensitätsdifferenzen erzeugten Potentials.

Eine zweite Alternative besteht darin, eine initiale Ladungsdichte durch gezielte Variation von $\partial\psi/\partial t$ zu generieren. In der zeitdiskreten Näherung läßt sich für

$$\psi(z_0,t_0) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi(z_0,t_0-1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\Delta_\theta) \\ \sin(\theta+\Delta_\theta) \end{pmatrix}$$

die initiale Ladungsdichte auf folgende Weise beschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\,\rho(z,t) &= \left(\psi_R \frac{\partial \psi_I}{\partial t} - \psi_I \frac{\partial \psi_R}{\partial t}\right) \\ &\approx \psi_R(z,t)\Big(\psi_I(z,t) - \psi_I(z,t-\Delta_t)\Big) - \psi_I(z,t)\Big(\psi_R(z,t) - \psi_R(z,t-\Delta_t)\Big) \\ &= \cos(\theta)\sin(\theta+\Delta_\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta+\Delta_\theta) \\ &= \sin(\Delta_\theta) \qquad \text{(mit Hilfe trigonometrischer Formeln).} \end{aligned} \tag{5}$$

2.2 Numerische Implementierung

Aufbauend auf dieser Korrespondenz kann die Ladungsdichte z.B. anhand von Bildintensitäten initialisiert werden, deren Evolution dann geeignet numerisch umgesetzt werden muß. Dazu stützen wir uns auf die Klein-Gordon-Gleichung, diskretisieren ψ zu $\widetilde{\psi}$ und approximieren (4) mittels finiter Differenzen, so daß sich im eindimensionalen Fall die Gleichung

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(x,t+1) = 2\widetilde{\psi}(x,t) - \widetilde{\psi}(x,t-1) - \widetilde{m}^2\widetilde{\psi}(x,t) \\ +\widetilde{c}^2\Big(\widetilde{\psi}(x+1,t) - 2\widetilde{\psi}(x,t) + \widetilde{\psi}(x-1,t)\Big),\end{aligned} \tag{6}$$

ergibt. (Höhere Dimensionen behandelt man analog.) Die Skalierungen der Koordinatenachsen sind in den Konstanten $\widetilde{c}$ und $\widetilde{m}$ enthalten. Gleichung (6) beschreibt eine Evolution, deren Übergangsmatrix symplektisch ist und die ihrerseits mit

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}(x,t) := \widetilde{\rho}(x,t) - \widetilde{\rho}(x,t-1) = \\ = \widetilde{\psi}(x,t)\Big(\widetilde{\psi}^*(x,t+1) + \widetilde{\psi}^*(x,t-1)\Big) \\ -\widetilde{\psi}^*(x,t)\Big(\widetilde{\psi}(x,t+1) + \widetilde{\psi}(x,t-1)\Big)\end{aligned} \tag{7}$$

eine Erhaltungsgröße in Form eines diskreten Analogons zur Ladungsdichte besitzt. Da $\widetilde{\rho}(x,t)$ wegen der symplektischen Übergangsmatrix der Evolution mit jedem Zeitschritt (halbe Periodendauer) oszilliert, stellt $\widehat{\rho}(x,t) = \widetilde{\rho}(x,t) - \widetilde{\rho}(x,t-1)$ eine Mittelung der approximierten Ladungsdichte $\widetilde{\rho}$ über zwei Zeitschritte dar.

3 Anwendung in der Bildverarbeitung

Aufgrund dieser Oszillation bewegen sich die Nulldurchgänge der Ladungsdichte, die aufgrund der eindeutigen Unterscheidung durch das Ladungsvorzeichen Kurven (für eindimensionale Grundbereiche) bzw. Hyperflächen (für höhere Dimensionen) darstellen und somit zusammenhängende Gebiete separieren, weitgehend kontinuierlich. Natürlich können dabei topologische Veränderungen entstehen, die im Rahmen der Bildverarbeitung wichtig sind, damit sich die Nulldurchgangslinien bzw. -flächen an Objektgrenzen effektiv annähern können.

Für die Anwendung der beschriebenen Methodik ist es entscheidend, binäre Merkmale wie z.B. eine hell-dunkel-Unterscheidung für die Separierung der Bildregionen zu nutzen. Beispielsweise zeigt Abb. 1 Evolutionsschritte bei Initialisierungen anhand der Bildintensitäten in einer MR-Aufnahme des Kopfes. Die aus den Nulldurchgängen resultierende Bildaufteilung kann als Vorverarbeitung dienen, um Rauschminderungsverfahren an regionale Charakteristiken anzupassen oder um Segmentierungsalgorithmen effektiv und effizient auf Basis der bereits erreichten Unterteilung zu gestalten. Weitere Einsatzmöglichkeiten ergeben sich, wenn in natürlicher Weise Phaseninformationen gegeben sind. Zum Beispiel läßt sich damit der lokal variierende Winkel des Grauwertgradienten so bearbeiten, daß sich Orientierungen lokal stabilisieren und in der Folge Kanten oder Texturmerkmale besser detektierbar werden (siehe Abb. 2).

Abb. 1. Entwicklung der Ladungsdichte bei intensitätsabhängiger Initialisierung für eine MR-Aufnahme: Original (links) Evolution nach 10 (Mitte) bzw. 20 (rechts) Zeitschritten. (Negative Ladungsdichten sind dunkel, positive sind hell dargestellt).

Abb. 2. Evolution des Gradientenwinkels (MR-Bild aus Abb. 1): Winkel im Bereich $-\pi$ (schwarz) bis π (weiß) zu Beginn (links), nach 10 (Mitte) und 20 (rechts) Zeitschritten.

Danksagung. Ich danke der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Unterstützung durch den Sonderforschungsbereich SFB 414 „Informationstechnik in der Medizin – Rechner und sensorgestützte Chirurgie" (Projekte Q1 und Q6).

Literatur

1. Aagedal H, Schmid M, Beth Th, Teiwes St, Wyrowski F: Theory of speckles in diffractive optics and its application to beam shaping. Journal of modern optics 43:1409-1421, 1996.
2. Baym G: Lectures on Quantum Mechanics. Addison-Wesley, 1973.
3. Haar Romeny ter BM (Ed.): Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision. Kluwer Academic Publishers, 1994.
4. Kass M, Witkin A, Terzopoulos D: Snakes: Active contour models International Journal of Computer Vision, 1(4):321-331, 1987.
5. Sethian JA: Level Set Methods. Cambridge University Press, New York, 1. Auflage 1996.