# A Characterization of Propositional Epistemic Logic

Edgar Everardo Martinez Garcia •

**Resumen**—It is well known some limitations of propositional calculus when we try to capture linguistic modalities in it. In this work, we present a non-exhaustive survey of propositional epistemic logic as an extension of classical propositional calculus, in which we can formally capture the epistemic modality, "to know". Further, we will emphasize some examples of formal proofs within a semantic and syntactic context, in order to realize the relationship between the concept of logical consequence and that of deduction.

**Index Terms**—epistemic logic history, propositional epistemic logic, formal axiomatic systems, S5 System.

## 1. Introducción

Es bien conocido el hecho de que el cálculo proposicional tiene sus limitaciones cuando intentamos capturar modalidades lingüísticas en él. Por ejemplo, las proposiciones son verdaderas o falsas, en otras palabras son o no son, y no es posible simbolizar que las cosas "se sabe que son" o "se considera posible que sean". Podemos demostrar esta imposibilidad del cálculo proposicional para representar el que las cosas "se sabe que son" con un caso simple.

Consideremos las siguientes premisas

1. Janeth sabe conducir.
2. Si Janeth sabe conducir, entonces no será infraccionada.

Simbólicamente tenemos $C$ y $C \rightarrow \neg I$. Ahora supongamos que Janeth fue infraccionada, simbólicamente $I$. Entonces tenemos una contradicción; por modus ponens de 1 y 2 obtenemos $\neg I$ y por nuestra suposición tenemos $I$. Esto debería sorprender por que nuestras premisas son coherentes y las tradujimos directamente al lenguaje de la lógica proposicional. Lo que ocurre es que el cálculo proposicional es insuficiente a la hora de expresar algo que "se sabe que es".

En este trabajo presentamos un estudio no exhaustivo de la lógica epistémica proposicional como una extensión del cálculo proposicional, en el cual es posible capturar formalmente la modalidad epistémica, "saber". Además, enfatizaremos algunos ejemplos de pruebas formales dentro de un contexto semántico y sintáctico, con el fin de ilustrar la relación entre el concepto de consecuencia lógica y el de deducción. Por otro lado, será posible observar cómo algunos sistemas de la lógica epistémica proposicional se relacionan entre sí.

En la Sección 2 se apreciará la motivación para considerar el estudio de la lógica epistémica proposicional. También se abordará de manera general el desarrollo histórico de esta disciplina. En la Sección 3 presentaremos el lenguaje básico de la lógica epistémica proposicional y los modelos sobre los cuales son interpretadas las fórmulas. En la Sección 4 se exponen cuatro de los sistemas más relevantes en cuanto a que estos comparten ciertas propiedades como sistema. En la Sección 5 con toda la herramienta desarrollada hasta entonces se muestra una caracterización de la lógica epistémica proposicional y además se considera el problema de la omnisciencia lógica. Concluimos en la Sección 6.

• *Department of Physics and Mathematics, Institute of Engineering and Technology, Autonomous University of Ciudad Juárez (UACJ), 32210 Chihuahua, México.*
*E-mail: emartine@live.com*

*This work has been partially supported by: a) National Laboratories Consolidation Project 280712, by CONACyT, Mexico; b) Prof. Dr. J.C. Acosta Guadarrama*

## 2. Génesis de la Lógica Epistémica

Aunque no nos damos cuenta o no hacemos un uso consciente de «él», el **conocimiento** es de vital importancias en la vida diaria, ya que mayormente realizamos cosas relacionadas con lo que «conocemos» o «creemos», y aún más importante **tomamos decisiones** en base a esto. Por otro lado, sabemos que la lógica formal trata de estudiar las condiciones en el que un raciocinio es válido o no. Así, sería natural preguntarse si es posible dotar el concepto de «conocimiento» con la formalidad que caracteriza la lógica simbólica, y la respuesta sería afirmativa. Existe la lógica epistémica, con la cual será posible clasificar nuestros razonamientos acerca del conocimiento en válidos o inválidos. Por otro lado, según Gómez-Caminero [7]:

> El objeto de la lógica epistémica es estudiar un tipo especial de contextos referencialmente opacos: aquellos en que se hace referencia al conocimiento que determinados agentes tienen de ciertos hechos como ocurre, por ejemplo, con las expresiones que tienen la siguiente forma:
>
> 1. $a$ sabe que $\phi$.
> 2. $a$ sabe si $\phi$.
> 3. $a$ no sabe que $\phi$.
> 4. $a$ no sabe si $\phi$.
> 5. Es posible, por lo que $a$ sabe, que $\phi$
>
> Donde $a$ es un término de individuo y $\phi$ es una proposición.

Con «contextos opacos» ha de entenderse cuando el rol semántico de los términos singulares que aparecen ante algunos operadores no es exclusivamente el de referirse a algún objeto.

Otra interpretación de la justificación de esta lógica es la del análisis del «cambio de información»; un individuo tiene cierta información acerca del mundo, y esa información la consideramos como un todo, es decir, solo es significativa como un cúmulo, a este lo llamamos conocimiento, y en menor grado; creencia. El cambio de información pues al que se refiere esta concepción es la comunicación. Entonces, un estudio sistemático o formal de estos conceptos es posible a través de la lógica en cuestión.

Con esto y algunos otros aspectos fuera de los alcances de este estudio está resaltada la importancia de su consideración con miras a resultados puramente teóricos e importantes aplicaciones prácticas.

### 2.1. Panorama Histórico General

La lógica epistémica se concibió de una manera más "definida" en la edad media y se asentó sobre el objeto principal de estudio de la epistemología, el concepto del conocimiento. Esta lógica comenzó con los intentos por parte de Garlandus Compotista, un lógico medieval de la escuela de Liège del Siglo XI, y Pierre Abélard, un filosofo escolástico medieval, de definir una concepción epistemológica de la implicación proposicional.

Gracias a los trabajos de Walter Burley, un lógico y filosofo escolástico inglés, y William de Ockham, fraile franciscano, lógico, filósofo y escolástico inglés, la disciplina se desarrollo más notablemente a principios del siglo XIV.

Alrededor del año 1330 la historia daba lugar al surgimiento de reglas generales para la implicación proposicional epistémica, reflexiones tratadas en trabajos como *On Consequences* y *On Knowing and Doubting* de Peter de Mantua y, más claramente, en *Consequentie* de Ralph Strode. Anticipado ya en el *Órganon* por Aristóteles, las construcciones *de dicto-de re* fueron redescubiertas por los "académicos" medievales mientras se investigaba la relación entre la verdad de saber, creer y tener fe. Aun más, contemplaron inferencias tales que su validez dependía de las modalidades epistémica-doxástica.

La investigación y concepción moderna de esta lógica, es decir, con el tratamiento formal, fue debida a Von Wright con su trabajo titulado *An Essay on Modal Logic*, obra en la cual se limita al caso *«se sabe que…»*, o de otra manera, el caso de un único agente o individuo que posee conocimiento. Jaakko Hintikka es el que daría más tarde el tratamiento semántico formal en *Knowledge and Belief, an Introduction to the Logic of Two Notions*.

## 3. Lógica Epistémica Proposicional

La lógica epistémica proposicional (LEP) es solo un caso específico de un sistema más amplio, la lógica modal proposicional, la cual es en *stricto sensu* el estudio de la sintaxis y la semántica de las modalidades que modifican la verdad de un enunciado. Estas son las llamadas modalidades **aléticas**. Es decir, esta categoría analiza conceptos como «necesidad», «posibilidad», «contingencia» y «realidad». La lógica modal tiene otras categorías, **no aléticas**, donde se estudian otros tipos de modalidades, los cuales son; las *deónticas*, que incluyen operadores como «obligatorio», «permitido» y «prohibido»; las *temporales*, resultado de la aplicación de diversos tiempos verbales, con los operadores «siempre será el caso», «será el caso», «siempre ha sido el caso» y «alguna vez fue el caso»; las *actitudinales* que agregan los operadores como «saber», «creer», «cuestionar», «desear», etcétera, operadores tales que denotan la relación entre un sujeto pensante y un enunciado.

Es en la última categoría es donde se encuentra nuestro objeto de estudio y es esta misma que se subdivide en dos clases más, la *epistémica* y la *doxástica*, las cuales son las lógicas del saber y del creer respectivamente. Aquí en contraste con los operadores lógicos como la conjunción o la disyunción, los cuales al relacionar dos fórmulas da lugar a una nueva, los operadores actitudinales conectan una constante lógica (en el caso de un solo agente) con una fórmula, lo que da lugar a una nueva. Nuestra presentación se centrara en el *operador epistémico* «saber».

Como se vera más adelante, existen varios sistemas axiomáticos para la lógica epistémica proposicional, los cuales solo difieren en el conjunto de axiomas que contemplan, por lo tanto, en general, puede ser definido un sistema axiomático en el cual dependiendo de las necesidades de representación podemos alternar entre sistemas tan solo con cambiar el conjunto de axiomas.

### 3.1. Sintaxis

Con todo esto, la representación formal o simbólica del operador epistémico, «saber», será «$\mathcal{K}$». Por otro lado, consideraremos el dual del operador epistémico «$\overline{\mathcal{K}}$» que puede ser definido a partir del operador $\mathcal{K}$ como

$$\overline{\mathcal{K}}_a\phi \iff \neg\mathcal{K}_a\neg\phi,$$

que se interpreta equivalentemente de las siguientes formas: «Con lo que $a$ sabe, es posible que $\phi$», «Con lo que $a$ sabe, $\phi$ no está descartada», «$a$ no sabe si $\neg\phi$» o «$a$ considera posible que $\phi$». Consideremos algunos ejemplos de enunciados y sus respectivas representaciones simbólicas:

1. Judas *sabe que* está traicionando a Jesús: $\mathcal{K}_jT$.
2. Pedro *sabe que* no merece morir como Jesús: $\mathcal{K}_p\neg M$.
3. Por lo que Caín sabe, es posible que Abel sea el preferido: $\overline{\mathcal{K}}_cP \iff \neg\mathcal{K}_c\neg P$.
4. Eva no sabe si la serpiente no dice la verdad: $\overline{\mathcal{K}}_eV \iff \neg\mathcal{K}_e\neg V$.

Al ser la lógica epistémica proposicional una extensión de la lógica clásica, esta hereda los operadores lógicos de la última. Es decir, en la fórmula

$$\mathcal{K}_a\phi,$$

el símbolo $\phi$ puede ser una fórmula atómica proposicional, de la lógica clásica, o puede ser una fórmula molecular de esta misma, por ejemplo:

1. Una fórmula *atómica* sería:
   "Prometeo robó el fuego de los dioses", simbolizada **F**. Al igual que en los ejemplos anteriores lo son las variables proposicionales $T$, $M$, $P$ y $V$.
2. Una fórmula *molecular* sería:
   "Prometeo robó el fuego de los dioses y las artes de Hefesto y Atenea", simbolizada ($\mathbf{F} \wedge \mathbf{A}$).

Teniendo lo anterior podemos simbolizar proposiciones tales como:

1. Pilato no sabe si liberar a Jesús o liberar a Barrabás: $\neg\mathcal{K}_p(J \vee B)$.
2. Blake sabe que caer en el exceso implica obtener sabiduría: $\mathcal{K}_b(E \rightarrow S)$.
3. Baudelaire sabe que en las etéreas regiones de la verdadera poesía no existe el mal y tampoco el bien: $\mathcal{K}_b\neg M \wedge \mathcal{K}_b\neg B$.

Para terminar con esta sección podemos afirmar que una fórmula bien formada de la lógica epistémica proposicional está definida de la siguiente manera (el lector encontrara una definición formal en secciones posteriores).

Informalmente, sea $P \neq \emptyset$ el conjunto de fórmulas atómicas proposicionales, es decir, de la lógica proposicional y $A$ un conjunto de agentes. Entonces son fórmulas bien formadas las derivadas solo de las siguientes reglas:

1. Si $p \in P$, entonces $p$ es una fórmula bien formada.
2. Si $\phi$ es una fórmula bien formada, entonces $\neg\phi$ es una fórmula bien formada.
3. Si $\phi$, $\psi$ es una fórmula bien formada, entonces $\phi\Box\psi$ es una fórmula bien formada, donde $\Box$ puede ser cualquier conector lógico de la lógica proposicional.
4. Si $\phi$ es una fórmula bien formada, entonces $\mathcal{K}_a\phi$ y $\overline{\mathcal{K}}_a\phi$ es una fórmula bien formada.

En adelante se usarán indistintamente los términos fórmulas y fórmulas bien formadas, dado que estas son las únicas que nos interesan.

### 3.2. Semántica

El enfoque más simple a la lógica epistémica proposicional es tal vez ver que es un tipo de lógica modal, la cual a su vez es una extensión de la lógica proposicional, con una semántica análoga a la que se utiliza en los conceptos de posibilidad y necesidad de la lógica modal. Por lo tanto, al igual que en esta, las fórmulas en la lógica epistémica son interpretadas en un **modelo de Kripke**.

Para entender qué es un modelo de Kripke, comencemos por lo básico. Una **semántica de mundos posibles** es un conjunto de métodos utilizados para analizar una amplia variedad de fenómenos intencionales, entre los cuales se encuentra la *modalidad*. Uno de estos métodos es la semántica de Kripke.

**Definición 3.1.** Para un sistema de $LEP$ con un solo agente $a$, una estructura $\mathscr{F}$, consiste en un par $(W, R_a)$, donde $W$ es un conjunto no vacío de mundos posibles y $R_a$ es una relación binaria de accesibilidad respecto a $a$ sobre $W$, es decir, $R_a \subseteq W \times W$.

El significado que adquiere la relación de accesibilidad se verá más claramente cuando se den algunos ejemplos concretos.

**Definición 3.2.** Una modelo $\mathscr{M}$ para un sistema epistémico es un par $(\mathscr{F},\mathscr{V}_{w_j})$, donde $\mathscr{V}_{w_j}$ es una aplicación de verdad en $w_j \in W$ con $j \in J$ y $J$ probablemente infinito, tal que $\mathscr{V}_{w_j} : P \rightarrow \mathcal{P}(W)$, es decir, $p \mapsto W_i$ o $V(\pi) = W_i$, donde $P$ denota el conjunto de fórmulas atómicas de la lógica clásica proposicional y $\mathcal{P}(W)$ es el conjunto potencia de $W$. A su vez $W_i \in \mathcal{P}(W)$, es el conjunto de mundos posibles donde las proposiciones en $P$ son verdaderas.

El modelo $\mathscr{M}$, explicado anteriormente, corresponde a un **modelo de Kripke** y la semántica que resulta de este modelo se le conoce como **semántica de Kripke**.

**Definición 3.3.** Dado un modelo de Kripke $\mathscr{M}$ una fórmula atómica proposicional, $p \in P$, es verdadera en un mundo $w$ que está en $\mathscr{M}$, si y solo si, $w$ está en el conjunto de los mundos posibles asignados a $p$ mediante $\mathscr{V}$. Simbólicamente:

$$(\mathscr{M}, w) \models p \iff w \in \mathscr{V}(p).$$

La notación $(\mathscr{M}, w) \models p$ se lee "$(\mathscr{M}, w)$ satisface $p$". En otras palabras, esto significa que $p$ es verdadera en el mundo $w$ que está en $\mathscr{M}$.

La semántica para los conectores de Boole está dada la siguiente manera:
Dado un modelo $\mathscr{M}$ sean $\phi$ y $\psi$ fórmulas de $LE$, entonces:

1. $(\mathscr{M}, w) \models \neg\phi \iff (\mathscr{M}, w) \not\models \phi$.
2. $(\mathscr{M}, w) \models \phi \wedge \psi \iff (\mathscr{M}, w) \models \phi$ y $(\mathscr{M}, w) \models \psi$.
3. $(\mathscr{M}, w) \models \phi \vee \psi \iff (\mathscr{M}, w) \models \phi$ o $(\mathscr{M}, w) \models \psi$.
4. $(\mathscr{M}, w) \not\models \phi \rightarrow \psi \iff (\mathscr{M}, w) \models \phi$ y $(\mathscr{M}, w) \not\models \psi$.

De manera similar, dado un modelo $\mathscr{M}$, una fórmula $\mathcal{K}_a\phi$ es verdadera en un mundo $w$, si y solo si, para todo $w'$ en $W$, si $R_a(w, w')$, entonces $(\mathscr{M}, w') \models \phi$. Simbólicamente:

$$(\mathscr{M}, w) \models \mathcal{K}_a\phi \iff$$
$$\forall w' \in W,\ R_a(w, w') \implies (\mathscr{M}, w') \models \phi.$$

Por último, sea $\mathscr{M}$ un modelo. Una fórmula $\overline{\mathcal{K}}_a\phi$ es verdadera en un mundo $w$, si y solo si, existe un $w'$ en $W$, tal que $R_a(w, w')$ y $(\mathscr{M}, w') \models \phi$. Simbólicamente:

$$(\mathscr{M}, w) \models \overline{\mathcal{K}}_a\phi \iff$$
$$\exists w' \in W,\ R_a(w, w') \text{ y } (\mathscr{M}, w') \models \phi.$$

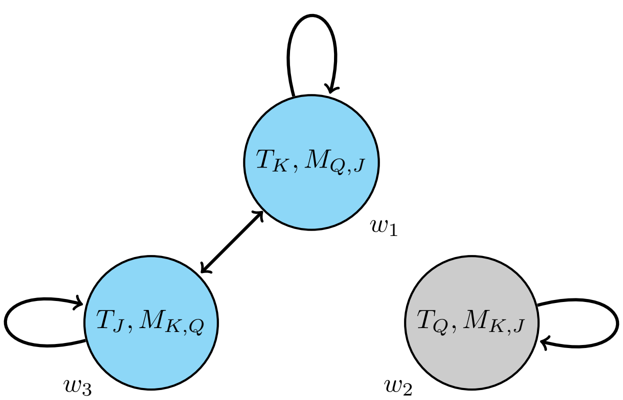
Todo lo anterior nos permite ahora definir formalmente el concepto de tautología.

**Definición 3.4.** Una fórmula $\phi$ es una tautología, si y solo si, es cierto en todos los mundos $w$ en todos los modelos $\mathscr{M}$. Cuando $\phi$ es una tautología escribimos $\models \phi$.

Las definiciones de verdad para el operador epistémico y su dual tal vez sean las más complicadas de comprender, pero lo esencial de estas es; que en la primera, se dice que un agente $a$ **sabe una cierta afirmación** $\phi$ en alguna actitud o disposición o circunstancia del agente, es decir en $(\mathscr{M}, w)$, si y solo si esa afirmación es cierta en todos los mundos que él considera posibles, dado $w$; y en la ultima, un agente $a$ **considera posible una cierta afirmación** $\phi$ en alguna actitud o disposición o circunstancia del agente, es decir en $(\mathscr{M}, w)$, si y solo si esa afirmación es cierta en algún mundo que él considera posible, dado $w$.

Con el objeto de adquirir una mayor comprensión sobre semántica de Kripke, ilustraremos lo anterior con algunos sencillos ejemplos:

**Ejemplo 3.5.** Supongamos que tenemos tres cartas cara abajo sobre una mesa, el rey, la reina y la sota. María puede tomar una para ella y las demás cartas se quedan en la mesa. El propósito es encontrar a la reina. En este caso fácilmente podemos ver que los **mundos posibles**, $w_i$, son como se muestra en el siguiente diagrama de estado:




donde $T_i$ significa que «María tiene la carta $i$» y $M_{i,j}$, «Las cartas $i$ y $j$ están sobre la mesa». Entonces, los mundos donde María no tiene la reina serían $w_1$ y $w_3$. Simbólicamente, $V_{w_1}(\neg T_Q) = \{w_1, w_3\}$, lo cual esta en concordancia con la definición de verdad para una fórmula de este tipo. Las flechas en el diagrama anterior denotan la relación de accesibilidad en el modelo de Kripke. Particularmente observamos en el ejemplo anterior que el mundo $w_3$ es accesible al mundo $w_1$ (y obviamente a sí mismo), mediante una relación de indiferenciabilidad, lo cual es intuitivo, ya que si María no tiene la reina, entonces o puede tener el rey o puede tener la sota. Por otro lado, ningún mundo está "conectado" a $w_2$ por que María solo sabe que no tiene la reina, por lo tanto no puede estar en $w_2$, entonces $\mathscr{V}_{w_1}(T_Q) = w_2$, es decir, es falso por definición.

Digamos que María no toma la carta de la reina, entonces:

- $(\mathscr{M}, w_1) \models \mathcal{K}_m \neg T_Q$,
- $(\mathscr{M}, w_1) \models \mathcal{K}_m \neg M_{K,J}$,
- $(\mathscr{M}, w_1) \models \neg \mathcal{K}_m M_{Q,J}$,

y como María solo sabe que no tomó la reina, $(\mathscr{M}, w_1) \models \mathcal{K}_m(M_{K,Q} \vee M_{Q,J})$.

Es decir, una flecha que va de un mundo $w_i$ a otro $w_j$, o a sí mismo, en los diagramas de estado, se puede leer como: "Con lo que el agente $a$ sabe y teniendo en cuenta que se está en el mundo $w_i$, bien se podría estar en el mundo $w_j$".

Esta explicación de modelo de Kripke fue intuitiva, ahora tomaremos en cuenta totalmente las definiciones que hemos dado anteriormente para demostrar algunas afirmaciones dadas.

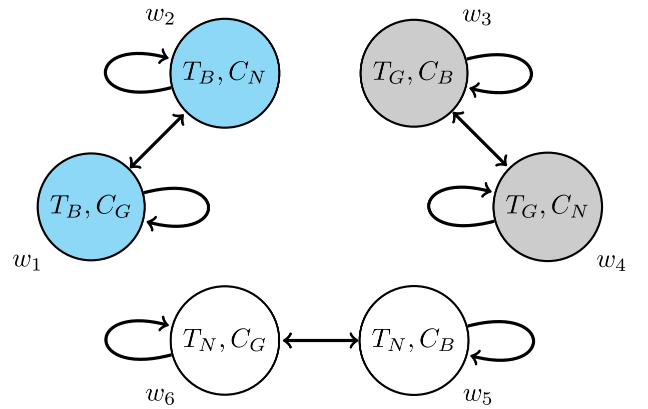
Tenemos principalmente que $(\mathscr{M}, w_1) \models \mathcal{K}_m \neg T_Q$, es decir, $\mathcal{K}_m \neg T_Q$ es verdad en $w_1$. En primer lugar con el diagrama de estado tenemos que

$$R = \{(w_1, w_3), (w_3, w_1), (w_1, w_1), (w_3, w_3), (w_2, w_2)\}.$$

En este caso, desde $w_1$ es accesible $w_1$ y $w_3$ ya que $(w_1, w_3)$, $(w_1, w_1) \in R$ y por lo tanto tenemos que $(\mathscr{M}, w_1) \models \neg T_Q$ y $(\mathscr{M}, w_3) \models \neg T_Q$, en palabras, para todo mundo que esta relacionado con $w_1$, $\neg T_Q$ es verdad, entonces por definición tenemos que $(\mathscr{M}, w_1) \models \mathcal{K}_m \neg T_Q$.

Por otro lado probemos que $(\mathscr{M}, w_1) \models \mathcal{K}_m(M_{K,Q} \vee M_{Q,J})$. Desde $w_1$ es accesible $w_1$ y $w_3$ ya que $(w_1, w_3)$, $(w_1, w_1) \in R$, entonces tenemos que se tiene que cumplir $(\mathscr{M}, w_1) \models (M_{K,Q} \vee M_{Q,J})$ y $(\mathscr{M}, w_3) \models (M_{K,Q} \vee M_{Q,J})$, pero por definición se tiene que $(\mathscr{M}, w_1) \models (M_{K,Q})$ o $(\mathscr{M}, w_1) \models (M_{Q,J})$ lo cual se cumple, y también $(\mathscr{M}, w_3) \models (M_{K,Q})$ o $(\mathscr{M}, w_3) \models (M_{Q,J})$ que igualmente se cumple. Por lo tanto, $(\mathscr{M}, w_1) \models \mathcal{K}_m(M_{K,Q} \vee M_{Q,J})$.

**Ejemplo 3.6.** Imaginemos un saco y una caja. La caja contiene tres canicas; una blanca, una gris y una negra. Julia puede tomar una para ella, una se queda en la caja y la restante va al saco de canicas (sin verla). En este caso tenemos los siguientes mundos posibles.




Digamos que $T_i$ significa «Julia tiene la canica $i$» y $C_i$ significa «La canica $i$ está en la caja», por ejemplo: los mundos donde Julia tomó la canica negra serían $w_5$ y $w_6$. De manera simbólica, $V_{w_5}(T_N) = \{w_5, w_6\}$.

Supongamos que Julia toma la canica negra, entonces:

- $(\mathscr{M}, w_5) \models \mathcal{K}_j T_N$,
- $(\mathscr{M}, w_5) \models \mathcal{K}_j \neg C_N$,
- $(\mathscr{M}, w_5) \models \neg \mathcal{K}_j \neg C_B$,

y como realmente Julia solo sabe qué color tomó ella,

$$(\mathscr{M}, w_5) \models \mathcal{K}_j(C_B \vee C_G).$$

Al igual que en el ejemplo anterior , una flecha que va de un mundo $w_i$ a otro $w_j$, en los diagramas de estado, se puede leer como: "Teniendo en cuenta que se está en el mundo $w_i$, por lo que el agente $a$ sabe, se podría estar en el mundo $w_j$" y esta denota la relación de equivalencia, es decir de indiferenciabilidad, en el modelo de Kripke.

Al igual que en el ejemplo anterior, esta explicación de modelo de Kripke fue intuitiva, ahora demostraremos algunas afirmaciones dadas, formalmente.

Demostremos que $(\mathscr{M}, w_4) \models \overline{\mathcal{K}}_j C_N$. En el diagrama de estado se puede observar que

$$R = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_3, w_3), (w_4, w_4), \\ (w_5, w_5), (w_6, w_6), (w_1, w_2), (w_3, w_4), (w_5, w_6), \}.$$

Por lo tanto desde $w_4$ es accesible $w_3$ y $w_4$ pero solo se cumple que $(\mathscr{M}, w_4) \models C_N$, es decir, se cumple al menos para $w_4$, entonces por definición se cumple que $(\mathscr{M}, w_4) \models \overline{\mathcal{K}}_j C_N$.

De la misma manera se pueden demostrar las demás fórmulas en este ejemplo.

Los anteriores diagramas de estado son modelos de Kripke y como mencionamos anteriormente, estos son sobre los que interpretamos las fórmulas de la lógica epistémica.

Semánticamente hablando, para decir que una conclusión es válida (es decir, una tautología) en una argumentación, es necesario que esté en relación de **consecuencia**

**lógica** con su conjunto de premisas. Si traducimos esto en términos del concepto de tautología, tenemos lo siguiente:

**Definición 3.7.** Sea $\Phi$ un subconjunto del conjunto de fórmulas de *LEP*, y $\phi$ una proposición de *LEP*, decimos que $\phi$ es consecuencia lógica de $\Phi$ en *LEP*, si y solo si para todo modelo de Kripke $\mathscr{M}$ y todo mundo $w \in W$ se tiene que $(\mathscr{M}, w) \models \Phi$ implica $(\mathscr{M}, w) \models \phi$. Donde $(\mathscr{M}, w) \models \Phi$ significa que $(\mathscr{M}, w) \models \psi, \forall \psi \in \Phi$.

En los ejemplos anteriores el conjunto $\Phi$ solo contiene una premisa, a saber, María sabe que no tiene la reina y Julia sabe que tiene la canica negra, respectivamente.

## 4. Sistemas Axiomáticos de LEP

La formalización de la lógica epistémica es posible a través de varios sistemas de axiomas, los cuales comúnmente toman como base un sistema, el cual se va ampliando sobre la base del anterior. En otras palabras, estos son extensiones de un sistema axiomático base. Es importante remarcar que los axiomas para cada sistema de LEP son simplemente formas generales que tienen las fórmulas, es decir, se obtiene una fórmula en este sistema axiomático si las variables se sustituyen por fórmulas particulares del sistema respectivo de LEP. Por lo tanto a un sistema axiomático **X** corresponde una lógica $X$ que está en total correspondencia con su conjunto de axiomas.

**Definición 4.1.** El sistema axiomático base es el **K** y está compuesto por los axiomas:

1. Las tautologías de la lógica proposicional. Axioma P
2. $\phi$ y $(\phi \rightarrow \psi) \implies \psi$. Modus Ponens
3. $\mathcal{K}_a(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\psi$. Axioma K
4. $\phi \implies \mathcal{K}_a\phi$. Necesitación

El axioma K fue nombrado en honor a Saul Kripke y también es conocido como el **axioma de distribución de $\mathcal{K}_a$ sobre el símbolo de condición,** $\rightarrow$. El sistema **K** es el sistema axiomático modal más débil, ya que toda tautología en este se encuentra en todos los demás sistemas de la lógica epistémica, pero no todas las tautologías de las demás están en **K**.

**Definición 4.2.** El sistema axiomático **T** se compone de los axiomas y reglas de inferencia siguientes:

1. Las tautologías de la lógica proposicional. Axioma P
2. $\phi$ y $(\phi \rightarrow \psi) \implies \psi$. Modus Ponens
3. $\mathcal{K}_a(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\psi$. Axioma K
4. $\phi \implies \mathcal{K}_a\phi$. Necesitación
5. $\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \phi$. Axioma T

El Axioma T también es conocido como el **axioma de la verdad** y este tiene el significado de que cualquier cosa que un agente conoce debe ser verdad.

**Definición 4.3.** El sistema axiomático **S4** se compone de:

1. Las tautologías de la lógica proposicional. Axioma P
2. $\phi$ y $(\phi \rightarrow \psi) \implies \psi$. Modus Ponens
3. $\mathcal{K}_a(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\psi$. Axioma K
4. $\phi \implies \mathcal{K}_a\phi$. Necesitación
5. $\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \phi$. Axioma T
6. $\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\mathcal{K}_a\phi$. Axioma 4

El Axioma 4 también es conocido como **introspección positiva** y denota a **agentes introspectivos**, es decir, estos agentes saben lo que conocen.

El último sistema a considerar y en el cual se basa este trabajo es **S5**:

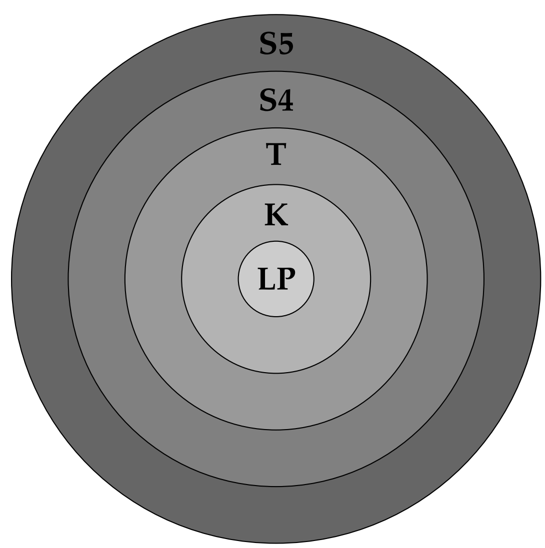
**Definición 4.4.** El sistema axiomático **S5** se compone de:

1. Las tautologías de la lógica proposicional. Axioma P
2. $\phi$ y $(\phi \rightarrow \psi) \implies \psi$. Modus Ponens
3. $\mathcal{K}_a(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\psi$. Axioma K
4. $\phi \implies \mathcal{K}_a\phi$. Necesitación
5. $\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \phi$. Axioma T
6. $\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\mathcal{K}_a\phi$. Axioma 4
7. $\neg\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\neg\mathcal{K}_a\phi$. Axioma 5

Este último axioma también se encuentra en la literatura del tema como **introspección negativa** y también denota a agentes introspectivos al igual que el anterior, pero en este caso, los agentes saben lo que no conocen. El sistema **S5** de la lógica epistémica es el más fuerte de los anteriores. Es decir, todas las tautologías de los demás sistemas son tautologías de **S5**, pero existen tautologías de **S5** que no están en los demás.

Por otro lado vale la pena notar que en el axioma P de cada sistema axiomático las tautologías a las que se hace mención, dado el operador epistémico, es posible sustituir fórmulas con este operador en ellas. Por ejemplo, en las tautologías de la lógica clásica como $(\phi \vee \neg\phi)$ y $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$, también pueden ser de la forma $(\mathcal{K}\phi \vee \neg\mathcal{K}\phi)$ y $\mathcal{K}\phi \rightarrow (\mathcal{K}\phi \vee \psi)$ respectivamente.

Lo dicho anteriormente en este apartado se puede visualizar de la siguiente manera.




## 5. Sistema Axiomático Formal *S5* de la Lógica Epistémica Proposicional

Ya se han visto los elementos necesarios para poder entender la lógica epistémica proposicional, los cuales son; el lenguaje, la semántica y los conjuntos de axiomas. Es hora de caracterizar el sistema axiomático formal *S5* de la lógica epistémica proposicional, con el cual sera posible profundizar un poco mas en el entendimiento de esta lógica, atendiendo conceptos mas avanzados.

**Definición 5.1.** El sistema formal $S5$ de LEP está caracterizado por:

I. *Vocabulario*:
  *a*) Símbolos para operadores lógicos,
$$\{\neg, \rightarrow, \mathcal{K}_a\}.$$
  *b*) Conjunto numerable de símbolos para fórmulas válidas,
$$\{p_1, p_2, p_3, \dots\}.$$
  *c*) Símbolos auxiliares,
$$\{(,)\}.$$

II. *Fórmulas válidas*:
  *a*) $(p_1, p_2, p_3, \dots)$ son fórmulas válidas.
  *b*) Si $\phi$ y $\psi$ son fórmulas válidas, entonces $(\neg\phi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ y $\mathcal{K}\phi$ son fórmulas válidas.
  *c*) El conjunto de todas las fórmulas validas es el generado empleando solo las dos reglas anteriores.

III. *Definiciones*:
  *a*) $(\phi \wedge \psi) \iff (\neg(\phi \rightarrow (\neg\psi)))$.
  *b*) $(\phi \vee \psi) \iff ((\neg\phi) \rightarrow \psi))$.
  *c*) $(\phi \leftrightarrow \psi) \iff (\neg((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg(\psi \rightarrow \phi))))$.
  *d*) $\overline{\mathcal{K}}_a\phi \iff \neg\mathcal{K}_a\neg\phi$.

IV. *Axiomas*:
  *a*) Las tautologías de la lógica de enunciados. Axioma P
  *b*) $\mathcal{K}_a(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\psi$. Axioma K
  *c*) $\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \phi$. Axioma T
  *d*) $\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\mathcal{K}_a\phi$. Axioma 4
  *e*) $\neg\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a\neg\mathcal{K}_a\phi$. Axioma 5

V. *Reglas de inferencia*:
  *a*) $\phi$ y $(\phi \rightarrow \psi) \implies \psi$. Modus Ponens (MP)
  *b*) $\phi \implies \mathcal{K}_a\phi$. Necesitación (N)

### 5.1. Deducción formal en *S5*

Ya tenemos casi todos los elementos necesarios para empezar a hacer deducciones, solo falta especificar cómo podremos construir estas en nuestro sistema lógico *S5* para poder empezar a trabajar con él.

**Definición 5.2.** Diremos que una fórmula $\phi \in S5$ es deducible de $\Gamma \subseteq S5$, o que $\phi$ es derivable de $\Gamma$, si $\phi$ es el último miembro de una sucesión finita $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_m$ de fórmulas de *S5*, donde $m \in \mathbb{N}$, tales que:

I. $\phi_m = \phi$
II. Cada $\phi_i$ de la sucesión es alguna de las siguientes:
  *a*) Un axioma de *S5*.
  *b*) Se sigue de las anteriores utilizando Modus Ponens.
  *c*) Se sigue de las anteriores utilizando la regla de Necesitación.
  *d*) Un miembro de $\Gamma$.

Si $\phi$ se deduce de $\Gamma$ en *S5*, entonces escribimos, $\Gamma \vdash_{S5} \phi$. Y por otro lado, podemos decir que $\phi$ es un **teorema** de *S5* si $\Gamma = \emptyset$. Utilizaremos indistintamente $\vdash_{S5}$ y $\vdash$.

Al igual que en la parte semántica, ahora daremos algunos ejemplos de inferencias pero desde el punto de vista sintáctico, que es posible ver como una manera mas operativa de inferir o hacer deducciones, también esto tiene el fin de ejemplificar la definición 3.7 de manera que la podamos comprender mejor para después darnos cuenta de la relación que guardan estas "formas de inferencia".

### 5.2. Ejemplos

Sean $\tau$, $\phi$ y $\psi$ cualesquiera fórmulas validas de $LE$, demostrar que:

**Ejemplo 5.3.** $(\tau \rightarrow \phi), (\phi \rightarrow \psi) \vdash (\tau \rightarrow \psi)$.

1. $(\tau \rightarrow \phi)$ Premisa
2. $(\phi \rightarrow \psi)$ Premisa
3. $(\tau \rightarrow \phi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\tau \rightarrow \psi))$ Axioma P
4. $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\tau \rightarrow \psi))$ MP 1, 3
5. $\tau \rightarrow \psi$ MP 2, 4

**Ejemplo 5.4.** $(\tau \rightarrow \phi) \vdash (\mathcal{K}_a\tau \rightarrow \mathcal{K}_a\phi)$.

1. $\tau \rightarrow \phi$ Premisa
2. $\mathcal{K}_a(\tau \rightarrow \phi)$ N
3. $\mathcal{K}_a\tau \rightarrow \mathcal{K}_a\phi$ Axioma K

**Ejemplo 5.5.** El Axioma K $\implies (\mathcal{K}_a\tau \wedge \mathcal{K}_a(\tau \rightarrow \phi)) \rightarrow \mathcal{K}_a\phi$.

1. $\mathcal{K}_a(\tau \rightarrow \phi) \rightarrow \mathcal{K}_a\tau \rightarrow \mathcal{K}_a\phi$ Axioma K
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ Axioma P
3. $(\mathcal{K}_a(\tau \rightarrow \phi) \rightarrow (\mathcal{K}_a\tau \rightarrow \mathcal{K}_a\phi)) \leftrightarrow ((\mathcal{K}_a(\tau \rightarrow \phi) \wedge \mathcal{K}_a\tau) \rightarrow \mathcal{K}_a\phi)$ Instanciamos 2
4. $(\mathcal{K}_a(\tau \rightarrow \phi) \wedge \mathcal{K}_a\tau) \rightarrow \mathcal{K}_a\phi$ 1, 3

**Ejemplo 5.6.** $\vdash (\mathcal{K}_a\tau \wedge \mathcal{K}_a\phi) \rightarrow \mathcal{K}_a(\tau \wedge \phi)$.

1. $\tau \rightarrow (\phi \rightarrow (\tau \wedge \phi))$ Axioma P
2. $\mathcal{K}_a\tau \rightarrow \mathcal{K}_a(\phi \rightarrow (\tau \wedge \phi))$ a, Ej 4.5
3. $(\mathcal{K}_a\tau \wedge \mathcal{K}_a\phi) \rightarrow \mathcal{K}_a\tau$ Axioma P
4. $(\mathcal{K}_a\tau \wedge \mathcal{K}_a\phi) \rightarrow \mathcal{K}_a(\phi \rightarrow (\tau \wedge \phi))$ SH 3, 4
5. $\mathcal{K}_a(\phi \rightarrow (\tau \wedge \phi)) \rightarrow (\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a(\tau \wedge \phi))$ Axioma K, Ej 4.6
6. $(\mathcal{K}_a\tau \wedge \mathcal{K}_a\phi) \rightarrow (\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a(\tau \wedge \phi))$ SH 4, 5
7. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ Axioma P
8. $((\mathcal{K}_a\tau \wedge \mathcal{K}_a\phi) \rightarrow (\mathcal{K}_a\phi \rightarrow \mathcal{K}_a(\tau \wedge \phi))) \rightarrow ((\mathcal{K}_a\tau \wedge \mathcal{K}_a\phi) \rightarrow \mathcal{K}_a(\tau \wedge \phi)))$ Instanciamos 7
9. $(\mathcal{K}_a\tau \wedge \mathcal{K}_a\phi) \rightarrow \mathcal{K}_a(\tau \wedge \phi))$ MP 6, 7

### 5.3. Propiedades Formales de *S5*

El sistema lógico *S5* al igual que la lógica clásica tiene unas propiedades interesantes a las que llamamos **metateoremas**, es decir, son proposiciones acerca de los sistemas formales. Los principales de estos metateoremas son el de correctez, completez, consistencia, y decibilidad. La correctez significa que **todo teorema es una tautología en** *S5*. La completez que **toda fórmula que es una tautología es un teorema en** *S5*.

**Teorema 5.7.** La lógica *S5* es correcta y completa, de manera simbólica [2]:
$$\forall\phi, \ \vdash_{S5} \phi \iff \models_{S5} \phi.$$

Es importante notar que este teorema implica la relación entre los conceptos de "deducción" y de "consecuencia lógica".

La segunda propiedad mencionada es la de consistencia, la cual significa que dado un sistema lógico, en este caso *S5*, no es posible deducir un teorema y su negación.

**Teorema 5.8.** No ocurre que $\vdash_{S5} \phi$ y $\vdash_{S5} \neg\phi$ para cualquier $\phi \in S5$ [2]. De manera equivalente podemos decir que $\emptyset$ es consistente en *S5*.

Continuando con la lista, el sistema *S5* también es decidible. En otras palabras,

**Teorema 5.9.** Existe un procedimiento efectivo para decidir si una fórmula en *S5* es o no satisfacible [2].

Ahora sabemos que también el sistema *S5* de la lógica epistémica proposicional, como la sentencial, tiene las propiedades formales deseables en cualquier sistema lógico y por lo tanto será de utilidad trabajar con él.

### 5.4. Omnisciencia Lógica

A pesar de ser una buena forma de interpretación del conocimiento, la semántica de Kripke no es perfecta y como hemos visto hasta el momento no existe un sistema axiomático correcto sino que hay varios sistemas, que dependiendo de las necesidades es posible escoger el que mejor se adapte. En particular *S5* da origen a un problema filosófico, el cual surge como producto de la incorporación de propiedades fuertes. Por ejemplo; si el agente $a$ sabe $\phi$ y sabe que $\phi \to \psi$, entonces $a$ también sabe $\psi$. No toda deducción es tan fácil y sería muy audaz decir que estamos al tanto de todas las consecuencias de nuestros conocimientos o creencias. Este es **el problema de la omnisciencia lógica**.

Ahora bien, primero definamos lo siguiente:

**Definición 5.10.** Decimos que una relación binaria $R$ definida en un conjunto $A$ es una relación de equivalencia si cumple tres propiedades:

1. Es *reflexiva*, es decir $R(x, x)$, $\forall x \in A$.
2. Es *simétrica*, es decir, $R(x, y) \implies R(y, x)$, $\forall x, y \in A$.
3. Es *transitiva*, es decir, $R(x, y)$ y $R(y, z) \implies R(x, z)$, $\forall x, y, z \in A$.

Con la definición anterior denotemos $\mathcal{S}5$ como el conjunto de los modelos de Kripke en los cuales la relación binaria de accesibilidad es una relación de equivalencia y a $\mathscr{K}$ como el conjunto de todos los modelos de Kripke. Este conjunto de enunciados son tautologías en el sistema lógico *S5*.

Tenemos entonces que se cumplen las siguientes afirmaciones:

- $\mathscr{K} \models \mathcal{K}_a\phi \wedge \mathcal{K}_a(\phi \to \psi) \to \mathcal{K}_a\psi$. LO1
- $\mathscr{K} \models \phi \implies \models \mathcal{K}_a\phi$. LO2
- $\mathscr{K} \models (\phi \to \psi) \implies \models (\mathcal{K}_a\phi \to \mathcal{K}_a\psi)$. LO3
- $\mathscr{K} \models (\phi \leftrightarrow \psi) \implies \models (\mathcal{K}_a\phi \leftrightarrow \mathcal{K}_a\psi)$. LO4
- $\mathscr{K} \models (\mathcal{K}_a\phi \wedge \mathcal{K}_a\psi) \to \mathcal{K}_a(\phi \wedge \psi)$. LO5
- $\mathscr{K} \models \mathcal{K}_a\phi \to \mathcal{K}_a(\phi \vee \psi)$. LO6
- $\mathcal{S}5 \models \neg(\mathcal{K}_a\phi \wedge \mathcal{K}_a\neg\phi)$. LO7

En [1] se distingue cada enunciado como una forma de omnisciencia lógica y lo cual es correcto en cierto sentido si apelamos a que cada agente es diferente y su facilidad de inferencia es relativa. Mencionamos algunas propuestas de soluciones al problema semántico de la omnisciencia lógica, es decir, soluciones que utilizan distintas alternativas semánticas para dar interpretaciones más cercas o fieles a la realidad, lo cual se hará sin entrar en ningún tipo de detalle sobre estas, ya que su desarrollo no es el objeto de este trabajo:

- “Mundos Posibles Imposibles.” Hintikka [9].
- “Mundos Imposibles.” Rantala [10].
- “Mundos Posibles No Estándar.” Fagin, Halpern y Vardi [11].

Lo que afirman en conjunto las propiedades anteriores, (LO1-LO7), es que **el agente** $a$ **es omnisciente**, es decir, un perfecto razonador lógico. Particularmente el agente $a$ sabe todos los teoremas y sabe las consecuencias lógicas de cualquier conjunto de expresiones o fórmulas de las que él tenga conocimiento. Esta situación no es intuitiva y tampoco real, por lo que no constituye un modelo cien por ciento certero sobre el conocimiento ya que nosotros esperamos modelar agentes con recursos limitados.

## 6. Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo pudimos observar intuitivamente cómo esta lógica resuelve los problemas de representación de la modalidad lingüística saber, y también cómo en los ejemplos de la parte semántica, los modelos de Kripke en los que interpretamos las fórmulas de la lógica epistémica nos permiten hacer inferencias formalmente, de manera que estas estén en total concordancia con la realidad y con la noción común que tenemos de la acción de saber. Aunado a esto tenemos los ejemplos de la parte sintáctica con los cuales realizamos también inferencias de una manera mucho mas operativa y las cuales gracias a las propiedades del sistema S5 (correctez y completez) sabemos que estas serán verdaderas siempre que las premisas sean verdaderas, al igual como ocurre en la lógica proposicional, por lo anterior, podemos decir que es mucho más fácil, y de cierta manera seguro, trabajar con el concepto de deducción formal en un sistema.

Por otro lado tenemos que la definición que hagamos de nuestro sistema formal dependerá en este caso solo del conjunto de axiomas que elijamos para trabajar, lo cual a su vez depende de la aplicación o uso que hagamos de ella, es decir, en la Definición 5.1, podemos tan solo cambiar el apartado IV y V, por cualquiera de los conjuntos presentados en la sección 4 y tendremos un sistema diferente. Con todo lo revisado anteriormente, además de su relevancia teórica, existen diversos campos de aplicación de la lógica epistémica, los cuales van desde la inteligencia artificial (IA) [12], teoría de juegos [13] y la robótica, pasando por seguridad de redes y criptografía [14], hasta el estudio de interacciones de coalición de varios tipos. Por citar un caso, en el área de la IA uno se ocupa de la descripción o representación del conocimiento de individuos o incluso de los mismos sistemas; por ejemplo, se trata de crear sistemas basados en el conocimiento para asistir a usuarios profesionales en la toma de decisiones de sus respectivos campos. Por otra parte, existen más aplicaciones concretas y presentarlas queda fuera del objeto de este trabajo. Con todo esto, el estudio de la lógica epistémica es relevante para entender diversos temas de investigación actuales.

## Referencias


[1] D.M. Gabbay y J. Woods, *Handbook of the history of logic: Volume 7*, 1ra edición, Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2006.

[2] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, B. Kooi, *Dynamic Epistemic Logic*, 1ra edición, Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2008.

[3] V. Hendricks y J. Symons, *Epistemic Logic, The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, *https://plato.stanford.edu/archives/fall2015/entries/logic-epistemic/*, Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2015.

[4] A. Páez, *Introducción a la lógica moderna*, 1ra edición, Bogotá, Colombia: Ediciones Uniandes, 2007.

[5] P.J. Iranzo, *Lógica Simbólica para Informáticos*, 1ra edición, Distrito Federal, México: Alfaomega, 2005.

[6] I. Boh, *Epistemic Logic in the Later Middle Ages*, 1ra edición, Abingdon, Inglaterra: Routledge, 2005.

[7] E.,F. Gómez-Caminero, *Tablas Semánticas para la Lógica Epistémica*, Departamento de Filosofía y Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad de Sevilla, Abril, 2011.

[8] W. Redmond, *Lógica simbólica para todos: (lógica elemental, modal, epistémica, deóntica, temporal y semántica de los mundos posibles)*, 1ra edición, Xalapa, Veracruz: Universidad Veracruzana, 1999.

[9] J. Hintikka, *Impossible possible worlds vindicated*, Journal of Philosophical Logic, 4(4):475-484, 1975.

[10] V. Rantala, *Impossible worlds and logical omniscience*, Acta Philosophica Fennica, 35:106-115, 1982.

[11] R. Fagin, J.Y. Halpern y M.Y. Vardi, *A nonstandard approach to the logical omniscience problem*, Artificial Intelligence, 79(2):203-240, 1995.

[12] W. van der Hoek y J.J. Ch. Meyer, *Epistemic logic for AI and computer science*, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2004.

[13] J. van Benthem, *Games in Dynamic-Epistemic Logic*, Bulletin of Economic Research, 53: 219–248.

[14] J. van Eijck, *Elements of Epistemic Crypto Logic*, CWI and ILLC, Amsterdam: LogiCIC Workshop, December 2, 2013.