Gödel's Theorems on Conditions of Being Incomplete and Consistent Elucidated with Principles of Abstraction Levels, Complementarity, and Self-Reference (Teoremas de Gödel Sobre Condiciones de Ser Incompleto y Consistente Elucidados con Principios de Niveles de Abstracción, Complementariedad, y Auto-Referencia)

Eric David Smith, *University of Texas at El Paso, UTEP*

Abstract—The question "What is a system?" Can be asked and answered in different ways, but it always refers to a total—what we call a system. Although the languages of engineering, design, and modeling describe parts of a system, the practice of systems engineering actually results when there is a reference to the system as a whole via self-reference. Gödel's theorems, on the conditions that determine if a system is incomplete or inconsistent, elucidate analogous relationships between sentences about systems, actual systems, and formal languages that describe systems. The conceptual structures of complementary levels of abstraction clarify the relationships between natural languages, systems, formal languages and pre-written methods for systems analysis. The objective is to advance the cognitive development of system descriptions.

Resumen—La pregunta "Qué es un sistema?" puede ser preguntada y contestada de diferentes ma-neras, pero siempre se refiere a un total—llamado un sistema. Aunque los lenguajes de ingeniería, diseño y modelaje describen partes de un sistema, la práctica de ingeniería de sistemas de veras resulta cuando hay referencia al sistema en su totalidad vía la auto-referencia. Los teoremas de Gödel, sobre las condiciones que determinan si un sistema es incompleto o inconsistente, elucidan relaciones análogas entre: frases sobre sistemas, sistemas actuales, y lenguajes formales que describen sistemas. Las estructuras con-ceptuales de niveles complementarias de abstracción clarifica las relaciones entre: len-guajes naturales, sistemas, lenguajes formales y métodos preescritos para el análisis de sistemas. El objetivo es avanzar el desarrollo cognitivo de descripciones de sistemas.

Index Terms—Proof, completeness, consistency, system hierarchy, self-reference, (Demostrabilidad, completez, consistencia, jerarquía de sistemas, auto-referencia).

1. Introducción

La **emergencia** en los sistemas complejos produce propiedades que no están presentes en las partes que forman el sistema [14] . La emergencia es descrita en este artículo por medio de conceptos.

Complementaridad es un principio, dualista que es una piedra de toque de complejidad y que se encuentra integrado en la descripción de las matemáticas de la mecánica cuán-tica. Complementariedad describe la relación entre atributos cualitativos emergentes [13] y elementos lógicos de un sistema, en términos de contraste e inconmensurabilidad. Sin embargo, el principio de complementariedad se usa naturalmen-te en el lenguaje de los sistemas y aclara las discusiones de ingeniería y arquitectura de sistemas [12]. Los diagramas de complementariedad muestran los atributos cualitativos como distintos, pero coexistes con elementos lógicos, como se muestra en la Figura 1.

La complementariedad en la naturaleza da lugar a juego infinito entre aspectos irreconciliablemente diferentes de la realidad. Los diagramas de complementación reducen los aspectos de los sistemas naturales a una descripción perceptible y distinta por sus dobles caras.

Niveles de abstracción [2] son una construcción principal de las descripciones de los sistemas que presentan capas abarcadoras. La Figura 2 muestra niveles de abstracción abarcadores.

Tenga en cuenta que la abstracción que abarca se muestra en los niveles superiores, pero para ser justos, los numerosos detalles observables en los niveles inferiores, alternativamente, pueden englobar los niveles más abstractos que a la

• *RIMES: Instituto de Investigación de Manufactura y de Sistemas Departamento de Ingeniería Industrial, Manufactura, y de Sistemas Universidad de Texas en El Paso E-mail: ESmith2@UTEP.edu*

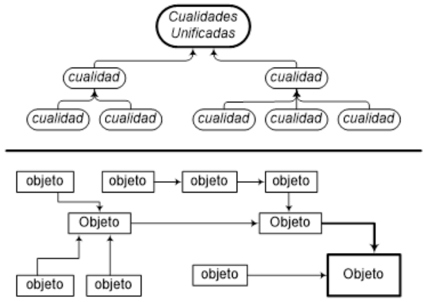

Figura 1. Lados complementarios de un sistema.

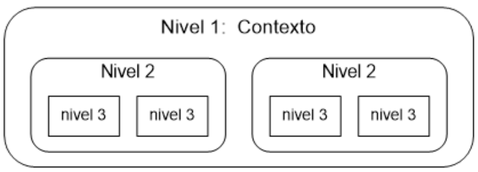

Figura 2. Niveles de abstracción abarcadores.

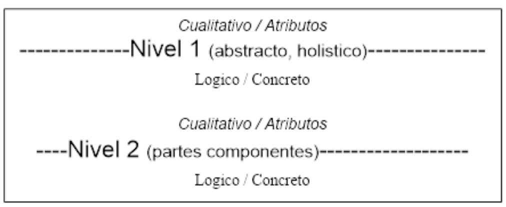

Figura 3. Niveles de los aspectos complementarios en diferentes niveles de abstracción.

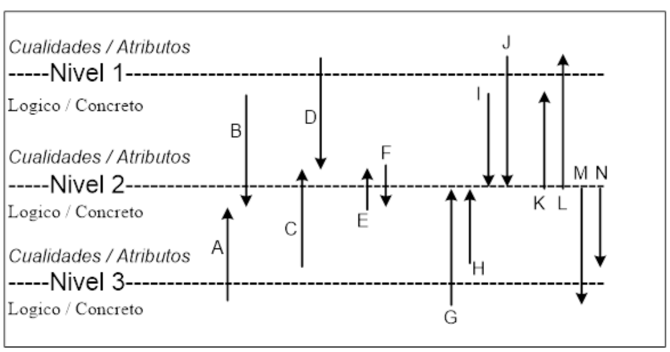

Figura 4. Efectos de los niveles complementarios.

vez son más vacíos. Por otra parte, si los niveles superiores tienen más y mayor detalle, no son abstractos. Los debates en este trabajo se ven facilitados por la representación de complementariedad a diferentes niveles de abstracción, como se muestra en la Figura 3.

En cualquier nivel particular, el lado de atributos de un dual complementario se caracteriza por las cualidades aparentes a ese nivel, mientras que el lado lógico es el conjunto de elementos concretos y sus interfaces. Las influencias y los efectos que los elementos cualitativos y lógicos de un nivel ejercen en otros elementos cualitativos o lógicos identificados en otros niveles se esquematiza en la Figura 4.

Los efectos indicados en la Figura 4 pueden ser descritos de la siguientes maneras: Relaciones concretas/Lógicas entre niveles adyacentes:

- A, Lógico/concreto de bajo nivel a elementos que componen la lógica de nivel superior.
- B, Lógico/concreto en nivel superior a elementos lógicos en nivel inferior Relaciones cualitativas entre niveles adyacentes:
- C, Integración de atributos cualitativos, combinados en nivel inmediatamente superior.
- D, los Atributos cualitativos globales proporcionan el contexto (ámbito de aplicación) para la descomposición de atributos. Complementariedades en el mismo nivel:
- E, los Elementos lógicos crean atributos holísticos en el mismo nivel. (Ejemplo: La fiabilidad calculada).
- M, los Atributos cualitativos imbuyen sentido en elementos lógicos al mismo nivel (Ejemplo: La fiabilidad como cualidad obligatoria de calidad).

Relaciones adicionales disponibles:

- G, la Lógica de nivel inferior contribuye al nivel superior total.
- H, los Atributos cualitativos de nivel inferior contribuyen al nivel superior
- I, la Lógica de nivel superior que abarca toda la escala inferior:
- J, los Atributos cualitativos de nivel superior que abarcan nivel inferior completo.
- K, el Nivel completo que influye la lógica del nivel superior.
- L, el Nivel completo que influye las cualidades del nivel superior.
- M, el Nivel plenario que abarca la lógica de nivel inferior.
- N, el Nivel plenario que abarca los atributos cualitativos de nivel inferior. El uso extensivo de este marco teorético no se ha demostrado todavía.

La lógica matemática, en su propio mundo ideal, podría limitar el número de atributos a sólo dos: Verdadero y Falso, que serían atributos absolutos derivados de la lógica, o influenciando la lógica. Tal punto de vista conduce a el tal Credo de los Matemáticos [9]:

1. X es cierto porque hay una prueba de X.—la Consistencia del sistema lógico.
2. X es cierto, así que hay una prueba de X.—-lo Completo del sistema lógico.

La primera declaración se dirige a la fe de la Consistencia del sistema lógico porque un sistema lógico no consistente podría contener tanto la prueba y la contraprueba de X. Un mando relacionado es: X es falso, entonces no hay prueba de X. La segunda declaración se dirige a lo Completo de un sistema lógico, es decir, el sistema lógico contiene una prueba para todos los X cierto (y ninguna prueba de X falso). La segunda declaración se puede volver a expresar como: X es falso porque no hay ninguna prueba de X.

Este alineamiento perfecto y estricto de relaciones bidireccionales crean diadas firmemente enlazando la verdad y la lógica, como ilustrado en la Figura 5.

Históricamente, el esfuerzo por descubrir esta alineación perfecta entre la verdad y la presencia de la prueba, igual

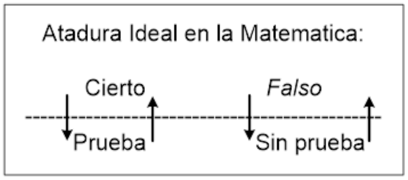

Figura 5. Correspondencia idealizada en la matemática.

como entre la falsedad y la falta de prueba, fue conmemorado en el movimiento para axiomatizar toda la matemática, a partir de la axiomatización de la aritmética. El punto culminante de este movimiento fue la aparición de Principia Mathematica, publicado 1910-1913 como la obra magna de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead. Principia Mathematica trató de aplicar esta alineación perfecta entre la verdad y la lógica, con producir axiomas sementales que derivaran todos los teoremas verdaderos, y ningún teorema falso [9].

Kurt Gödel (1906-1978), lógico, matemático y filósofo austriaco, en última instancia probó que esa estrecha unión no era posible. El teorema de Gödel utiliza un marco conceptual del lenguaje matemático, con lados complementarios a diferentes niveles de abstracción, como se ilustra.

"La importación absolutamente impactante del teorema de Gödel ... es que los cimientos poderosos de las matemáticas son, en última instancia, construidos sobre arena, ya que el nexo entre la prueba y la verdad es demostrablemente inestable. El problema que Gödel descubrió es que en la matemática, y de hecho en casi todos los sistemas formales de razonamiento, las declaraciones pueden ser verdad pero indemostrables no sólo no experimentadas, sino imposibles de demostrar, ni siquiera en principio" [5]. Una unión aparentemente fuerte entre los atributos cualitativos y pruebas lógicas en la matemática se hace más compleja en función de la presencia de muchas más cualidades, además de verdadero y falso—por ejemplo, la fuerza, firmeza, pertinencia, y formación buena. La matemática lógica no puede avanzar sin percepciones complejas de una gran cantidad de atributos cualitativos, como conmemorado por Leibniz:

> "Sans les mathématiques on ne pénètre point au fond de la philosophie.
> Sans la philosophie on ne pénètre point au fond des mathématiques.
> Sans les deux on ne pénètre au fond de rien."—Leibniz
> (Sin las matemáticas no se puede penetrar profundamente en la filosofía. Sin filosofía no se puede penetrar profundamente en las matemáticas. Sin ambos, no se puede penetrar profundamente en nada.)
> 1686 Discours de Métaphysique [10]

Los sistemas expresivos son complementarios y emplean lados semánticos y sintácticos. Específicamente, un sistema debe tener la calidad semántica de expresión, y debe ser lógicamente expresiva en términos sintácticos como se ilustra en la Figura 6.

Un paralelo se puede observar con la validación de un sistema—en que el sistema integral satisface todas las necesidades de los clientes—y la verificación de los requisitos específicos, y originados de lógica.

Figura 6. Lados semánticos y sintácticos de un sistema expresivo.

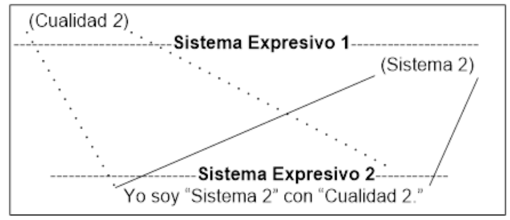

Figura 7. Auto-Referencia: Términos tipográficos se refiere al "Sistema 2" desde dentro del Sistema 2. En verdad se refiere a términos globales (cualitativos y lógicos) que sólo tienen sentido dentro del total más alto del Sistema 1.

La **Auto-Referencia** sólo puede ocurrir cuando un sistema de nivel superior comprende un sistema de nivel inferior. La auto-referencia es posible cuando términos sintácticos en un sistema expresivo de menor nivel se refieren tipográficamente y sintácticamente a términos semánticos que sólo existen en un sistema expresivo de más alto nivel más abstracto que abarca el nivel bajo. Las referencias a calidades integrales desde dentro del sistema de nivel inferior, sólo pueden realmente ocurrir con referencias a cualidades emergentes e integrales que plenamente existen sólo en un nivel superior, como se ilustra en la Figura 7.

Algunos ejemplos de auto-referencia dentro de una empresa de ingeniería de sistemas son: 1, Una base de datos de requisitos para un programa en la industria que contiene la exigencia que: "Este programa estará situado dentro de la base de datos.", y, 2, Un bloque de contexto del "Systems Modeling Language (SysML)" en un diagrama que hace referencia al proceso de diseño completo.

La auto-referencia se produce a menudo, sin esfuerzo, y casi sin dar aviso, en la mente humana, y puede ser fácilmente escrita en los sistemas de documentación de ingeniería. La consciencia de la ocurrencia de la auto-referencia es vital para la producción de materiales de diseño debidamente organizados en sistemas de ingeniería. Por ejemplo, la auto-referencia desapercibida en una descomposición sistémica puede insertar rápidamente y de manera errónea, en niveles más bajos de la descomposición, elementos del diseño que simplemente no existen en niveles inferiores de la descomposición—por ejemplo, atributos de alto nivel. Estos errores resultan a menudo porque la mente humana—aún cuando supuestamente se centra sólo en los niveles más bajos de descomposición—tiene fácil acceso a todo el sistema, y rápidamente genera términos que hacen referencia al total del sistema.

Las expresiones auto-referenciales implican la integración de un sistema completo. La ingeniería de sistemas se jacta de la práctica de la integración de los sistemas y, en consecuencia, la auto-referencia a la totalidad de un sistema es típica en muchas pláticas de ingeniería de sistemas. A modo de ejemplo: en los documentos de ingeniería se hace referencia a los procesos de ingeniería de sistemas que dan forma a sistemas enteros. Por lo tanto, esta cuestión se puede pedir: ¿Cómo se pueden mejorar los esfuerzos de integración por el reconocimiento del concepto y práctica de la auto-referencia en los lenguajes naturales, técnicas y teorias de sistemas?

La complejidad existe dondequiera que una auto-petición se presenta. Tenga en cuenta que el concepto de auto-referencia sólo podía accederse en esta sección introductoria después del desarrollo de dos conceptos que son complejos—1, la complementariedad, y 2, los niveles de abstracción que implican la emergencia.

Auto-referencia da lugar a la posibilidad de infinitas auto-referencias en una serie de bucles. Auto-referencia es, sin duda, un principio de auto-conciencia. En lugar de una definición y discusión de auto-conciencia, la descripción de una máquina universal de Turing, la cual puede observarse y modelarse a sí misma, se puede examinar: "Inspirado por la cartografía de Gödel de PM [Principia Mathematica] , Alan Turing se dio cuenta de que el umbral crítico para este tipo de universalidad computacional viene exactamente en ese punto donde una máquina es lo suficientemente flexible para leer e interpretar correctamente una serie de datos que describen su propia estructura. En esta coyuntura crucial, una máquina puede, en principio, de manera explícita ver cómo hace cualquier tarea en particular, paso a paso. Turing se dio cuenta de que una máquina que tiene este nivel crítico de flexibilidad puede imitar a cualquier otra máquina, por muy complejo que éste es. ¡La universalidad es lo más lejos que se puede ir!" [9].

Fractales, ilustraciones vivas de complejidad matemática, son generados por la auto-referencia. Por ejemplo, el Conjunto de Mandelbrot es generado por la aplicación iterativa de un bucle de realimentación matemática:

$$Z_{n+1} = Z_n + C. \tag{1}$$

Un número complejo, c, se encuentra en el conjunto de Mandelbrot si, cuando a partir de $Z_0 = 0$, y la aplicación de la iteración en varias ocasiones, nunca el valor absoluto de Z_n supera un cierto número que depende de c. Cuando se enseña gráficamente en un plano complejo, se ve que el conjunto de Mandelbrot elaborara bordos que no simplifican en cualquier ampliación. Esto califica esta frontera como un fractal—una piedra de toque de complejidad.

2. Desarrollo: teoremas de Gödel explicados

Esta sección desarrolla los teoremas de Gödel en términos de complementariedad. "Para Gödel, la distinción entre intuiciones y demostración rigurosa siempre fue vívidamente clara. Era la inevitabilidad de esa distinción misma que ha sido tan fuertemente sugerida por su famosa prueba" [8]. "El texto de su tesis (1929) demuestra la claridad concisa que se convertiría en un sello distintivo de los escritos de Gödel. Tras sus observaciones preliminares, Gödel describe los detalles del formalismo empleado y hace precisa la terminología que se utiliza. Dedica una atención especial para

(*semántica*)
------------**Matematica**------------
Principia Matematica

Figura 8. Matemática complementaria frente la sintáctica de Principia Mathematica.

distinguir nociones semánticas de las nociones sintácticas, como por supuesto debe" [6].

Esta sección también emplea los conceptos de niveles de abstracción y de auto-referencia. "El artículo de Gödel es difícil. Cuarenta y seis definiciones preliminares, junto con varias importantes propuestas preliminares, se tienen que dominar antes de que los resultados principales se alcancen. Vamos a tomar un camino mucho más fácil, sin embargo, para permitir que el lector vea la vislumbra de la ascensión y coronación de la estructura." [11]. El siguiente es sólo un resumen gráfico de la prueba rigurosa.

Principia Mathematica, lógicamente describe una derivación tan sintáctica de la matemática, progresando axiomáticamente y desarrollando derivaciones simbólicas y puramente mecánicas, que se convierte en un lugar sin vida, formalizando divorciadamente de la intuición de los números reales. Principia Mathematica llegó a ser un palacio "laberíntico, sin sentido, mecánico, batido de símbolos, es decir, carentes de sentido" [9]. La Figura 8 muestra que Principia Mathematica es realmente sólo la parte sintáctica de las matemáticas.

Russell y Whitehead veían a Principia Mathematica como una descripción de última instancia, completa y coherente en todas formas. Gödel probó que Principia Mathematica era incompleta, y siempre sería incompleta, sin importar cuántos más axiomas y reglas de lógica se agregaran.

Meta-Matemática: Evidentemente complementaria

Con el fin de encarnar la afirmación paradójica necesaria para sus pruebas, Gödel subió un nivel de abstracción al reino de la Meta-Matemática, donde declaraciones complementarias con partes sintácticas y semánticas, son más fáciles de invocar y expresar. Es evidente que la Meta-Matemática se acerca a la expresividad libre del lenguaje natural, y describe la totalidad del universo desde la perspectiva humana. Si Gödel podría construir una asignación coherente y reversible entre la Meta-Matemática y la Matemática, demostraría que la Matemática no sólo es lógica, sino también inefablemente semántica. Su cartografía demostraría que las matemáticas son complementarias, aunque esto no siempre es evidente. Para sus pruebas, era suficiente trabajar con la aritmética—que se basa en los números naturales y el cálculo simple."PM" es la colección sencilla de representaciones sintácticas de la aritmética que Gödel emplea en sus pruebas. La relación jerárquica de los niveles complementarios completos de la Meta-Matemática, Matemática, y Aritmética se muestra en la Figura 9.

Principia Mathematica encarnó el intento de describir la matemática solamente sintácticamente. Para demostrar el carácter incompleto de la Principia Mathematica en relación a la matemática, Gödel trabajó con la relación análoga entre PM y la aritmética, demostrando que las declaraciones complementarias (y así integrales) se pueden expresar en la

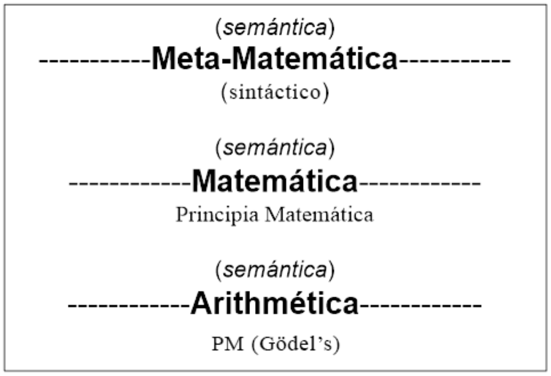

Figura 9. Aritmética, Matemática y la más abstracta Meta-Matemática como sistemas completos y complementarios—con lados sintácticos y semánticos—en diferentes niveles de abstracción.

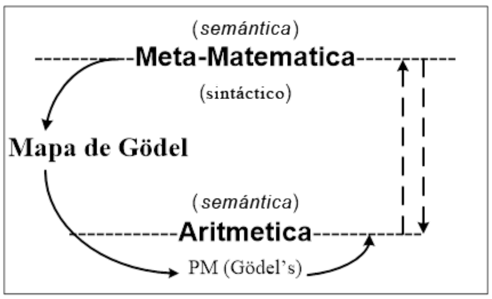

Figura 10. Asignación de Gödel entre Meta-Matemática y Aritmética, con la ayuda de la sintaxis de PM.

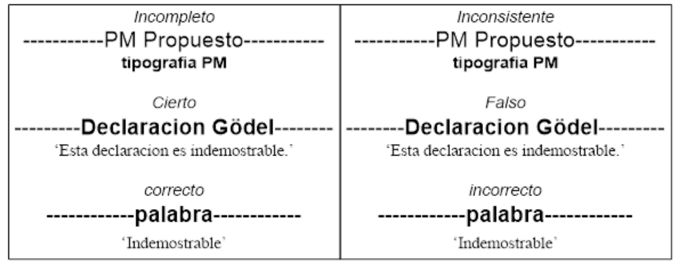

Figura 11. Los niveles complementarios muestran los supuestos y el razonamiento de las pruebas de Gödel.

Aritmética, pero no en PM—que es un sistema incompleto, como Principia Mathematica.

Gödel empleó su declaración complementaria en la Meta-Matemática, cuya sintaxis es la siguiente: "Esta declaración es indemostrable", que incluye partes sintácticas y la calidad absoluta semántica de "indemostrable". Tenga en cuenta que "no-demostrable" se puede ver tanto como un atributo incuestionable y absoluto originando de arriba hacia abajo con la calidad puramente semántica de "indemostrable", o como una conclusión lógica deducida del razonamiento lógico y exhaustivamente sintáctico. Gödel tenía la tarea de probar que la frase "Esta declaración es indemostrable" podría ser asignado a la aritmética, pero no a PM. Curiosamente, la asignación emplea la ayuda de símbolos puramente sintácticos de PM para construir un mapa de Gödel. En última instancia, los teoremas de Gödel demuestran que la Aritmética es un sistema complementario como la Meta-Matemática, pero que PM es puramente sintáctico. El mapa de Gödel se muestra gráficamente en la Figura 10.

Declaración Auto-Referencial Gödel: "Esta declaración es indemostrable dentro de PM."

Para llegar al corazón de la complementariedad de la sintaxis y el significado semántico, Gödel demostró que un sistema PM lo suficientemente desarrollado podría hacer la afirmación: "Esta afirmación es indemostrable." Tenga en cuenta que "indemostrable" es un atributo que puede surgir de dos maneras diferentes: 1, la imposibilidad de la prueba se puede determinar con exhaustivos intentos lógicos para demostrar una declaración, o, 2, la imposibilidad de la prueba se puede establecer "desde arriba" como un atributo incuestionable. Así "indemostrable" incluye los dos lados de la complementariedad. La frase de Gödel incorpora una afirmación paradójica, y ofrece la oportunidad de demostrar las verdades importantes acerca de la complementariedad.

Razonamiento a partir de la Declaración de Gödel sigue dos supuestos:

1. Si la palabra "indemostrable" tiene el atributo "correcto," entonces la declaración de Gödel en su conjunto tiene el atributo de verdadero, y la formalización PM es incompleta debido a la misma afirmación verdadera, pero imposible de demostrar. En palabras de Kurt Gödel: "Así que la proposición que es indecidible en el sistema de PM resulta ser decidido por consideraciones de meta-matemática" [7].
2. Si la palabra "indemostrable" es incorrecta, entonces la declaración del Gödel en su conjunto tiene el atributo de falso, y por eso PM es incoherente, porque PM expresó una declaración inconsistente. Los enigmas de estos argumentos se resumen en la Figura 11.

Por lo tanto, la conclusión de Gödel es que PM es siempre incompleto o inconsistente. "La prueba original era bastante complicada, al igual que un programa largo en lenguaje de máquina" [4]. De hecho, la Declaración de Gödel se envuelve dentro de la misma Declaración de Gödel, porque la declaración en su sintaxis puede ser sustituida por la declaración del conjunto de Gödel—¡la creación de una regresión potencialmente infinita! Tenga en cuenta que la encapsulación y la auto-referencia a la totalidad del pliego de Gödel indica que PM es capaz de referirse a su propia estructura. Las conclusiones de Gödel, sin embargo, pueden ser entendidas sólo teniendo en cuenta la Declaración de Gödel una vez, como se describió anteriormente.

El Teorema de la Incompletitud de Gödel en última instancia se basa en el hecho de que la Declaración de Gödel es comprensible dentro de la Meta-Matemática, ya a través de que el mapa de Gödel la hace existir en la aritmética, pero no es demostrable dentro de PM. La conclusión de Gödel sobre la Coherencia, demuestra que la coherencia de PM no es demostrable dentro de PM, es decir, PM no puede probar su consistencia propia. Los Teoremas de Gödel prueban que todos los sistemas axiomáticos para desarrollar la matemática, con exclusión de los más sencillos, son incompletos o inconsistentes.

Figura 12. Los niveles complementarios en una jerarquía de sistemas.

Los teoremas de Gödel, en última instancia, comentan sobre los sistemas que son lo suficientemente poderosos para describirse a sí mismos mediante la auto-referencia. "Nadie antes de Gödel se había dado cuenta de que los dominios que las matemáticas pueden modelar es el dominio de las matemáticas en sí." [9]. Las matemáticas son así capaces de examinarse por sí mismas, como una máquina universal de Turing puede, y, a través de traducciones tipográficas, es capaz de simular cualquier cosa.

Salirse de la restricción de la parte lógica de la complementariedad sigue siendo un reto de la informática. Uno de los objetivos últimos en ciencias de la computación es llegar a meta-programación mediante a la creación de un meta-lenguaje, capaz de auto-referencia, auto-reflexión subjetiva y auto-modificación.

2.1. Aplicación a la Ingeniería de Sistemas y Modelos de SysML

Las relaciones entre la meta-matemática, la matemática y la aritmética elucidan relaciones análogas entre los sistemas de sistemas, los sistemas y los componentes de sistemas. Un ejemplo se encuentra entre: el lenguaje natural, lenguajes de sistemas como el Idioma de Modelaje de Sistemas (SysML), y el sintaxis esquemático, respectivamente. Esto se muestra en la Figura 12.

El lenguaje natural es capaz de expresar conceptos abstractos con significado semántico a través de símbolos sintácticos. Idiomas de ingeniería de sistemas, tales como SysML, también describen los sistemas en abstracto, y tienen lados tanto de la sintáctica y semántica, con estrictas limitaciones colocadas en los significados semánticos. Tenga en cuenta una analogía con la prueba de Gödel: Sistemas de sistemas se pueden asignar a los sistemas con la ayuda de la notación tipográfica disponible en SysML. El rigor de las reglas sintácticas SysML imitan las normas de la teoría de tipos de Russell, que no permite la auto-referencia, con referencia sólo a los objetos de abajo; en el lado semántico, las relaciones entre los atributos en diferentes niveles de abstracción forman una jerárquica de descomposición de cualidades.

Los lenguajes sintácticos de sistemas formalizados y axiomatizados se ven acosados por la debilidad de que no pueden describir la complementariedad inherente en la totalidad de los sistemas. Por ejemplo, para métodos de axiomatización y deducción, las analogías siguientes a la declaración del Gödel son aplicables:

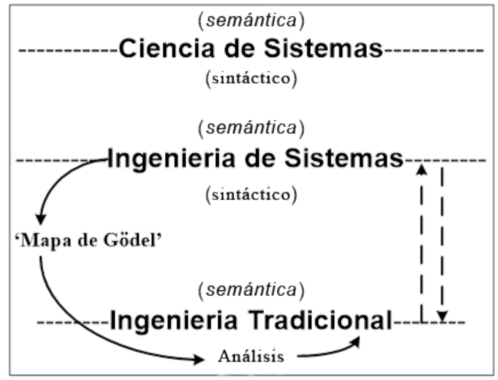

Figura 13. Aplicación de mapa de Gödel a niveles de ingeniería.

1. Este (complementario) sistema-de-sistemas no puede ser descrito en la sintaxis del lenguaje natural.
2. La sintaxis del lenguaje natural es incompleta para formar una descripción de los sistemas de sistemas, o puede llegar a conclusiones inconsistentes acerca de los sistemas de sistemas.

Otros ejemplos son:

1. Este sistema (complementario) no puede ser descrito con la sintaxis SysML.
2. SysML es incompleto como una descripción de los sistemas reales, o pueden llegar a conclusiones inconsistentes acerca de los sistemas reales.

Algunas conclusiones relacionadas incluyen:

- Este proyecto es imposible de manejar porque se expresa en los métodos de gestión formal.
- Los métodos de gestión formales son incompletos o inconsistentes en la descripción de los proyectos.
- Este sistema no es descriptible en términos de requisitos bien formados.
- Los requisitos formalizados son incompletos o inconsistentes como una descripción de un sistema.
- Esta arquitectura de sistema no es capaz de describir un sistema real (como la Arquitectura Marco del Departamento de Defensa (DoDAF).
- DoDAF es incompleto o incoherente como una descripción de la arquitectura de sistema.
- Los procesos reales no se pueden expresar como los flujos de proceso formales.
- Los procesos formales son incompletos o inconsistentes.

Curiosamente, a pesar de que la Ingeniería de Sistemas a menudo se ve como un conjunto integral y que sustituye a las disciplinas tradicionales de ingeniería, la analogía de numeración de Gödel indica que la Ingeniería de Sistemas se puede asignar a la ingeniería tradicional. Además, al igual que el mapa de Gödel no podría lograrse sin la sintaxis rigurosa de PM, la asignación entre la Ingeniería de Sistemas y la ingeniería tradicional sólo se puede hacer rigurosa con la ayuda del lenguaje formalizado y tipográfico del análisis de ingeniería precisa. Vea la Figura 13.

Del mismo modo, la ciencia de sistemas sólo se puede asignar a Ingeniería de Sistemas con la tipografía bien

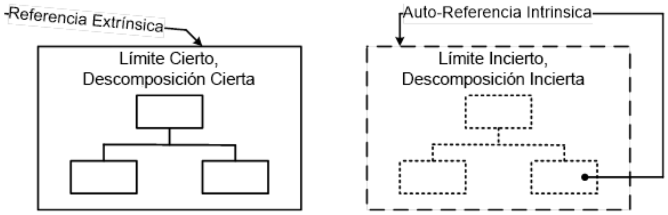

Figura 14. Límites y descomposiciones a la luz de referencia de procedente extrínseca o intrínseca.

formada de SysML, que permite la descripción precisa de sistemas. Como una advertencia, tenga en cuenta que las afirmaciones en cuanto a los sistemas de ingeniería no son demostrables, sin recurrir a reglas sintácticas rigurosas.

Buede [3] habla de la complejidad en términos de los límites del sistema. Beade indica que, si la frontera del sistema puede ser identificada, el sistema puede ser exactamente descompuesto y entendido lógicamente. Esto es lo mismo que decir que un sistema puede ser descrito formalmente y axiomáticamente por un observador externo, pero no por el propio sistema que emplea la auto-referencia. De hecho, una referencia al sistema por el sistema mismo hace incierta la frontera del sistema, permitiendo que la complejidad real entre en la descripción del sistema, a la ubicación de la frontera del sistema, y a las descomposiciones previamente incuestionables. Vea la Figura 14.

La auto-referencia necesariamente introduce la complejidad de la complementariedad en las descripciones de sistemas. Las teorías jerárquicas sólo pueden describir adecuadamente a los sistemas bajo condiciones análogas a las que mantiene la teoría de tipos de Russell, y tales descripciones son incompletas o inconsistentes.

3. Conclusión

La eliminación de la auto-referencia es un primer paso para obligar a que un sistema complejo y complementario sea gobernado por una descripción axiomatizada; sin embargo, la descripción será siempre incompleta o inconsistente. Si el sistema es inconsistente, habrá en el sistema verdades que no se pueden probar. Si el sistema hace referencia a su propia consistencia, entonces se puede probar inconsistente. Un ejemplo se encuentra pertinente a los sistemas de votación y el Teorema de Imposibilidad [1], que demuestra que un sistema de votación consistente es incompleto en cuanto a la equidad (un atributo semántico); además, un sistema de votación que pretende ser coherente puede ser demostrado inconsistente.

Los teoremas de Gödel indican que la naturaleza en la realidad es complementaria, y que la comprensión de sistemas complejos se puede aumentar cuando los sistemas se describen con complementariedad recurrente en cada nivel de abstracción. Un marco integral y complementario de niveles, que consisten en tanto de lados cualitativos como cuantitativos, es capaz de conceptualizar la auto-referencia. Las asignaciones pueden traducir la descripción de un sistema complementario a un nivel adyacente de abstracción, siempre que el nivel adyacente sea complementario y suficientemente expresivo. Un mapa riguroso se basará en una rigurosa sintaxis.

La degradación de un sistema, o descripción de un sistema, se produce cuando se reduce sólo a su dimensión sintáctica o semántica. La conciencia de esa degradación es un indicador líder importante de la comprensión del sistema y, por consiguiente, de la capacidad del sistema. Un ejemplo es la descripción cualitativa de una onda cuadrada discreta, donde una perfecta descripción con la serie de Fourier requiere una suma infinita de ondas componentes. Así como una descripción cualitativa en realidad nunca puede crear un objeto diferenciado, la lógica no puede describir los atributos cualitativos. La emergencia y la complementariedad también se relacionan a través de los teoremas de Gödel. La existencia de un argumento lógico que parece conducir a un atributo cualitativo emergente es difícil de alcanzar, y, por el contrario, la existencia de un atributo cualitativo no garantiza una explicación lógica. Por otra parte, un anuncio auto-referencial que la consistencia de un sistema axiomático suprimirá la emergencia indica, a primera vista, que el sistema es inconsistente.

Los teoremas de Gödel se expresan de diferentes maneras en las literaturas diferentes, lo que indica que las conclusiones de Gödel son de carácter general y abstracto. En el análisis final, aunque la sintaxis y el significado semántico de las pruebas de Gödel ha sido aprobadas y consagradas por el tiempo por las comunidades de los lógicos y matemáticos, tal vez hay espacio para cuestionar la adaptación precisa de las anotaciones a los significados sintácticos. Tenga en cuenta que cualquier lectura de la prueba consiste en pre-existentes interpretaciones ortodoxas de los significados de cada símbolo, y el uso posterior de tales interpretaciones en el impulso hacia la conclusión final. Cada pedacito de la notación utilizada por Gödel está sujeta a una interpretación humana que no puede ser estable bajo la re-interpretación. Una vez que se produce cualquier duda razonable, la forma precisa de la prueba está abierta a modificaciones, y puede conducir a la situación que las piezas sintácticas previamente secas pueden impregnarse con significancia semántica, y del mismo modo las piezas que eran exclusivamente semánticas pueden llegar a ser exclusivamente los productos de la lógica.

El pensamiento sistémico es facilitado por la conciencia de ambos lados de la complementariedad: lógicos y cualitativos. Los seres humanos fácilmente dan turnos, a veces exclusivamente o extremadamente, desde pensamiento cualitativo a razonamiento lógico, sin ser conscientes de la dicotomía entre los medios de pensamiento. La separación entre los lados de la semántica y la sintáctica de la complementariedad es borrosa, a menos de ser obligada por un observador inflexible.

Referencias

[1] Arrow, K. J. (1950). *A Difficulty in the Concept of Social Welfare. Journal of Political Economy*, 58(4), 328–346.

[2] Bahill, A. T., Szidarovszky, F., Botta, R., & Smith, E. D. (2008). *Valid models require defined levels. International Journal of General Systems*, 37(5), 553-571.

[3] Buede, D. M. (2000). *The engineering design of systems: Models and methods*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

[4] Chaitin, G. J. (2007). *Thinking about Gödel and Turing: Essays on complexity*, 1970 - 2007. London: World Scientific.

[5] Davies, P. (2007). *Foreword. In Thinking about Gödel and Turing: Essays on Complexity*, 1970-2007 (pp. v-xi). Singapore: World Scientific.

[6] Dawson, J. W. J. (1997). *Logical dilemmas: The life and work of Kurt Gödel. Wellesley*, MA: A. K. Peters.

[7] Gödel, K. (1962). *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems (B. Meltzer, Trans.)*. New York: Basic Books Inc.

[8] Goldstein, R. (2005). *Incompleteness: The proof and paradox of Kurt Gödel*. New York: Atlas Books.

[9] Hofstadter, D. (2007). *I am a strange loop*. New York: Basic Books.

[10] Montgomery, G. R. (Ed.). (1962). *Discourse on metaphysics*. La Salle: Open Court Publishing Co.

[11] Nagel, E., & Newman, J. R. (2001). *Gödel's proof*. New York: New York University Press.

[12] Smith, E. D. (2008). *Complementarity in systems architecting*. Paper presented at the Conference on systems engineering research (CSER), Los Angeles, CA.

[13] Smith, E. D., & Bahill, A. T. (2010). *Attribute substitution in systems engineering*. Systems Engineering, 13(2).

[14] Warfield, J. N. (2002). *Understanding complexity: Thought and behavior*. Palm Harbor, FL: AJAR Publishing Company.