

АЛГОРИТМЫ РОБАСТНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ МАГНИТНОЙ ЛЕВИТАЦИИ*

Аннотация

Исследованиям в области синтеза робастных законов управления уделяется существенное внимание в современной теории управления. Это определяется особой практической значимостью рассматриваемых здесь вопросов и необходимостью создания новых эффективных методов и алгоритмов робастного управления, базирующихся на современных возможностях цифровой вычислительной техники.

Основной целью синтеза робастных законов управления является обеспечение некоторых желаемых робастных свойств замкнутой системы, таких как устойчивость и качество процессов управления, при всевозможных вариациях модели объекта в заданных допустимых пределах.

В работе рассматриваются вопросы построения робастных законов управления для системы магнитной левитации. Эта система имеет неточную математическую модель в связи с существенно нелинейной динамикой и сложностью математического описания магнитного поля.

Предлагаются два оптимизационных подхода к синтезу законов управления. Первый из них базируется на использовании прогнозирующих моделей, а второй является модификацией линейно-квадратичного оптимального синтеза с добавлением дополнительного частотного ограничения. Приводятся соответствующие вычислительные алгоритмы, обеспечивающие реализацию законов управления в режиме реального времени. Выполняется сравнение этих алгоритмов на тестовых примерах управления системой магнитной левитации.

Ключевые слова

Алгоритмы управления; робастность; оптимизация; магнитная левитация; прогнозирующая модель; реализация в режиме реального времени.

Sotnikova M.V., Gilyazova Yu.A., Selitskaya E.A.

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

ROBUST OPTIMAL CONTROL ALGORITHMS FOR MAGNETIC LEVITATION PLANT

Abstract

Robust control design is one of the main branches of research activity in modern control theory. This is determined by special practical importance of the issues discussed here and the necessity to create new effective methods and algorithms for robust control design based on modern capabilities of digital computers.

The main goal of robust control design is to provide some desired robust properties of the closed loop system, such as stability and quality of control processes, while the mathematical model can vary within given admissible limits.

In the paper the problem of robust control design for magnetic levitation plant is considered. This system has an inaccurate mathematical model, because it has essentially nonlinear dynamics and very difficult approximate description of the magnetic field.

* Труды II Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (Convergent'2017), Москва, 24-26 ноября, 2017

Proceedings of the II International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2017), Moscow, Russia, November 24-26, 2017

Two different optimization approaches for control design are proposed. The first of them is based on the use of predictive models and the second one is the modification of a linear-quadratic synthesis, where additional constraints in the frequency domain are introduced. The corresponding computational algorithms for real-time implementation of a control laws are given. These algorithms are compared by illustrative examples of magnetic levitation system control.

Keywords

Control algorithms; robust control; optimization; magnetic levitation; predictive model; real-time implementation.

Введение

Исследованиям в области синтеза робастных законов управления уделяется существенное внимание в современной теории управления. Это определяется особой практической значимостью рассматриваемых здесь вопросов и необходимостью создания новых эффективных методов и алгоритмов робастного управления, базирующихся на современных возможностях цифровой вычислительной техники.

В литературе принято различать два класса неопределенностей в модели объекта: структурированного и неструктурированного типа [1]. В рамках первого варианта неопределенными являются параметры математической модели объекта, а во втором случае неопределенность порождается неизвестной немоделируемой динамикой. Отметим, что оба этих варианта повсеместно встречаются на практике при построении математических моделей объектов управления.

Основной целью синтеза робастных законов управления является обеспечение некоторых желаемых робастных свойств замкнутой системы, таких как устойчивость и качество процессов управления, при всевозможных вариациях модели объекта в заданных допустимых пределах. В настоящее время разработано множество подходов к синтезу робастных законов управления, например, методы, связанные с применением линейных матричных неравенств [2], теория структурированного сингулярного числа μ [3], методы, основанные на теории H_2 и H_∞ [4] и другие. Данные подходы отличаются, в частности, типом используемых математических моделей, оптимизируемыми функционалами качества, возможностью применения к различным классам систем, а также сложностью соответствующих вычислительных алгоритмов.

В данной работе рассматриваются вопросы построения робастных законов управления для системы магнитной левитации. Эта система имеет существенно нелинейную динамику и характеризуется сложностью математического описания магнитного поля, действующего на подвешенный в воздухе объект. Таким образом применение робастных алгоритмов управления для данного объекта является наиболее целесообразным.

Основу предлагаемого в работе подхода к синтезу закона управления составляют использование прогнозирующей модели и оптимизация динамики замкнутой системы на конечном горизонте прогноза с учетом имеющейся неопределенности параметрического типа. Отметим, что ранее в работе [5] был предложен алгоритм прогнозирующего управления, обеспечивающий робастную устойчивость замкнутой системы в линейном приближении. При этом особенностью предлагаемого в данной работе подхода является обеспечение определенного робастного качества замкнутой системы. Для сравнения рассматривается также вариант синтеза робастного закона управления, являющийся модификацией линейно-квадратичного синтеза с добавлением дополнительного частотного ограничения. Приводятся соответствующие вычислительные алгоритмы для реализации разработанных законов управления в режиме реального времени. Полученные результаты иллюстрируются примерами имитационного моделирования в среде Matlab/Simulink.

Постановка задачи синтеза оптимального робастного стабилизирующего управления

Рассмотрим математическую модель системы магнитной левитации [5]. Она представляет собой стальной шарик, который находится в воздухе, и электромагнит. На шарик действуют две силы: F_g – сила тяжести и F_m – сила притяжения электромагнита. Управляя напряжением, подаваемым на электромагнит, требуется стабилизировать положение шарика в заданной точке, используя силу притяжения электромагнита для уравновешивания силы тяжести.

Запишем систему нелинейных дифференциальных уравнений, представляющих математическую модель магнитной левитации. На основе законов электрических цепей и второго закона Ньютона, а также с учетом приближенного выражения для силы притяжения электромагнита, получим уравнения:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = g - \frac{1}{2} \cdot \frac{K_m x_3^2}{M x_1^2}, \quad \dot{x}_3 = -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} u. \quad (1)$$

Здесь $x_1 = x = x_b$ – расстояние от электромагнита до шарика, причем начало системы координат Oxy расположено на поверхности электромагнита, а ось Ox направлена вертикально вниз; $x_3 = I$ – сила тока катушки электромагнита, $u = V$ – напряжение, подаваемое на катушку, R – сопротивление катушки, L – ее индуктивность, M – масса шарика, g – гравитационная постоянная, K_m – магнитная постоянная. Управляющим воздействием является напряжение u , а контролируемой переменной – смещение шарика x_b . Дополним систему (1) уравнениями измерений:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3. \quad (2)$$

Отметим, что уравнения (1), (2) лишь приближенно представляют динамику системы, поскольку имеются существенные сложности в формализованном описании электромагнитного поля при наличии дополнительных неучтенных воздействий с его стороны. При этом наибольшие трудности возникают в моделировании поведения шарика вблизи поверхности электромагнита.

Будем рассматривать динамику системы (1) в отклонениях от положения равновесия $(x_{10}, 0, x_{30}) = (x_{b0}, 0, I_0)$, где x_{b0} – положение шарика, соответствующее напряжению $u = u_0$. При этом соответствующее значение силы тока I_0 найдем из соотношения: $I_0 = \sqrt{2gM / K_m x_{b0}}$. Введем переменные, описывающие систему в отклонениях: $\bar{x}_1 = x_1 - x_{10}$, $\bar{x}_2 = x_2$, $\bar{x}_3 = x_3 - x_{30}$, $\bar{u} = u - u_0$ и составим уравнения линейного приближения

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \quad \dot{\bar{x}}_2 = \frac{2g}{x_{b0}} \bar{x}_1 - \frac{2g}{I_0} \bar{x}_3, \quad \dot{\bar{x}}_3 = -\frac{R}{L} \bar{x}_3 + \frac{1}{L} \bar{u}, \quad (3)$$

а также уравнения для измерений: $\bar{y}_1 = y_1 - y_{10}$, $\bar{y}_2 = y_2 - y_{20}$. Будем считать, что уравнения (3) представляют собой номинальную линейную модель объекта управления.

Для примера подставим в уравнения (3) физические параметры конкретного устройства Quanser MAGLEV [6]: $L = 0.4125$ Н, $R = 11$ Ом, $K_m = 6.5308E-005$ Н·м²/А², $M = 0.068$ кг. Рассмотрим положение равновесия системы для смещения шарика $x_{b0} = 0.006$ м и найдём соответствующие собственные числа матрицы разомкнутой системы (3): $\lambda_1 = 57.18$, $\lambda_2 = -57.18$, $\lambda_3 = -26.67$. Одно из них является положительным, что свидетельствует о неустойчивости нулевого положения равновесия.

На основе системы (3) запишем уравнения модели в tf-форме от входа \bar{u} к выходу $\bar{y} = (\bar{y}_1 \ \bar{y}_2)^T$:

$$\bar{y} = \mathbf{P}_n(p) \bar{u}, \quad (4)$$

где $\mathbf{P}_n(p)$ – передаточная матрица номинальной модели, p – оператор дифференцирования. Ограничим область неопределенности номинальных моделей (3) и (4), варьируя значение коэффициента a_{21} непрерывной модели (3) в пределах $\pm 20\%$ от номинального значения $a_{21}^0 = 2g/x_{b0}$, то есть будем считать, что $a_{21} \in [0.8a_{21}^0, 1.2a_{21}^0]$. Данное предположение основано на том, что при изменении положения равновесия шарика, а также с учетом неточностей описания магнитного поля, линейные модели (3) отличаются главным образом значением коэффициента a_{21} .

Цель управления состоит в том, чтобы стабилизировать положение шарика в заданной точке, то есть обеспечить выполнение равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_1(t) = 0. \quad (5)$$

Качество процессов управления будем определять следующим квадратичным функционалом, заданным на движениях замкнутой системы (3)

$$J(\bar{u}) = \int_0^{\infty} (\bar{x}^T \mathbf{Q} \bar{x} + r \bar{u}^2) dt. \quad (6)$$

Здесь $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_3)^T$ – вектор состояния системы (3), \mathbf{Q} – положительно полуопределенная весовая матрица, а $r > 0$ – заданное вещественное число.

Ставится задача синтеза закона управления, обеспечивающего достижение цели управления (5) для объекта, представленного уравнениями (3), с минимизацией заданного функционала качества (6) с учётом неточности задания математической модели объекта. При этом неточность модели определяется отмеченной выше возможностью вариации коэффициента a_{21} модели (3) в заданных допустимых пределах. Аналогично формулируется задача синтеза для дискретной модели объекта и квадратичного функционала.

Далее в статье рассматриваются два различных подхода к решению поставленной задачи. Первый из них основан на использовании прогнозирующих моделей, а второй является модификацией линейно-квадратичного синтеза с введением дополнительного частотного ограничения.

Синтез робастных законов управления с использованием прогнозирующих моделей

В основе предлагаемого подхода лежит идеология управления с прогнозом (Model Predictive Control, MPC), представленная, например, в работах [7], [8].

Для пояснения основной идеи подхода введем линейную прогнозирующую модель общего вида, представляя ее следующей системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[i+1] &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[i] + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}[i], \quad i = k+j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \hat{\mathbf{x}}[k] = \tilde{\mathbf{x}}[k], \\ \hat{\mathbf{y}}[i] &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}[i]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}} \in E^n$, $\hat{\mathbf{u}} \in E^m$ и $\hat{\mathbf{y}} \in E^l$ – векторы состояния, управления и измерения соответственно, \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} – постоянные матрицы соответствующих размерностей. Прогнозирующая модель (7) обычно формируется на основе имеющейся линейной математической модели объекта управления и позволяет приближенно спрогнозировать его динамику на определенный конечный интервал времени вперед, называемый горизонтом прогноза. Заметим, что начальные условия для прогнозирующей модели совпадают с текущим состоянием $\tilde{\mathbf{x}}[k]$ объекта, достигнутом на k -ом такте его функционирования.

Будем считать, что целью управления является стабилизация нулевого положения равновесия замкнутой системы. Для характеристики качества процессов стабилизации введем квадратичный функционал, рассматриваемый на горизонте прогноза P :

$$J_k = J_k(\{\hat{\mathbf{x}}\}, \{\hat{\mathbf{u}}\}) = \sum_{j=1}^P \left\{ \hat{\mathbf{x}}[k+j]^T \mathbf{R}_{k+j} \hat{\mathbf{x}}[k+j] + \hat{\mathbf{u}}[k+j-1]^T \mathbf{Q}_{k+j} \hat{\mathbf{u}}[k+j-1] \right\}. \quad (8)$$

Здесь \mathbf{R}_{k+j} и \mathbf{Q}_{k+j} – положительно определенные симметрические матрицы для любого дискретного момента $j = 1, \dots, P$. Нетрудно показать, что задача минимизации функционала (8) сводится к задаче квадратичного программирования [8] следующего вида

$$J_k(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{u}} + 2\mathbf{f}^T \bar{\mathbf{u}} + g \rightarrow \min_{\bar{\mathbf{u}} \in \Omega \subseteq E^{mP}}, \quad (9)$$

где $\bar{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{u}}[k], \hat{\mathbf{u}}[k+1], \dots, \hat{\mathbf{u}}[k+P-1])^T \in E^{mP}$ – вспомогательный вектор, обозначающий программную последовательность векторов управления на горизонте прогноза; матрица \mathbf{H} и вектор \mathbf{f} определяются матрицами $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ прогнозирующей модели и весовыми матрицами \mathbf{R}_{k+j} и \mathbf{Q}_{k+j} функционала (8); $\Omega \subseteq E^{mP}$ – допустимое множество, образованное системой ограничений на контролируемые и управляющие переменные.

Известная классическая схема реализации управления с прогнозом состоит из следующих действий:

1) Осуществляется измерение вектора $\tilde{\mathbf{y}}[k]$ и восстанавливается текущее состояние $\tilde{\mathbf{x}}[k]$ объекта с помощью асимптотического наблюдателя.

2) Решается задача квадратичного программирования (9) для прогнозирующей модели (7) с начальным условием $\hat{\mathbf{x}}[k] = \tilde{\mathbf{x}}[k]$.

3) Из найденной в результате решения задачи (9) оптимальной последовательности $\hat{\mathbf{u}}^*[k], \hat{\mathbf{u}}^*[k+1], \dots, \hat{\mathbf{u}}^*[k+P-1]$ используется только первый вектор $\hat{\mathbf{u}}^*[k]$ в качестве управления на следующем такте (с момента времени $k+1$ до момента $k+2$).

4) Для следующего такта, начиная с момента времени $k+1$, все операции, указанные в пунктах 1–3, повторяются заново.

Заметим, что при отсутствии ограничений задача (9) имеет аналитическое решение [8]:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}^* = \bar{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{x}}[k]. \quad (10)$$

Здесь матрица $\bar{\mathbf{K}}$ не зависит от номера такта и однозначно вычисляется для заданных матриц прогнозирующей модели (7) и весовых матриц функционала (8). Однако, в соответствии со стратегией управления с прогнозом, из последовательности $\hat{\mathbf{u}}^*[k], \hat{\mathbf{u}}^*[k+1], \dots, \hat{\mathbf{u}}^*[k+P-1]$ используется только первый элемент на следующем такте $k+1$. Этот элемент определяется как

$$\hat{\mathbf{u}}^*[k] = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}[k], \quad (11)$$

где \mathbf{K} – первые m строк матрицы $\bar{\mathbf{K}}$. Поскольку матрица \mathbf{K} не зависит от номера такта, ее достаточно вычислить один раз вне контура управления, что в данном случае значительно упрощает его реализацию.

Важно отметить, что качество процессов управления замкнутой МРС-регулятором системы существенно зависит от точности прогноза, а следовательно, от адекватности представления прогнозирующей моделью реальной динамики системы. В некоторой степени неточность модели компенсируется пересчетом оптимального программного управления на горизонте прогноза для каждого такта, то есть адаптацией к фактическому состоянию объекта и текущим условиям функционирования. Тем не менее, качество процессов управления может быть улучшено, если в процессе оптимизации учитывать неопределенность математической модели объекта.

Будем считать, что часть коэффициентов матриц математической модели (7) задана неточно и принадлежит некоторому диапазону. Модифицируем приведенную выше схему управления с прогнозом. Для этого введем следующий функционал

$$J_k(\bar{\mathbf{u}}) = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_{\theta} \subseteq E^s} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) \bar{\mathbf{u}} + 2\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})^T \bar{\mathbf{u}} + g, \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\theta} \in E^s$ – вектор, в который объединены все коэффициенты матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} модели (7), заданные неточно, а Ω_{θ} – допустимое множество вариации указанных коэффициентов. При этом множество Ω_{θ} определяется как декартово произведение диапазонов допустимых вариаций для каждого из коэффициентов в отдельности. Отметим, что значение функционала (12) для фиксированного программного управления $\bar{\mathbf{u}}$ равно наибольшему значению квадратичной функции при всевозможных вариациях параметров $\boldsymbol{\theta}$ в пределах допустимого множества Ω_{θ} , то есть соответствует наихудшей возможной ситуации.

Теперь, вместо задачи квадратичного программирования (9) будем рассматривать следующую оптимизационную задачу о поиске робастного оптимального программного управления на горизонте прогноза:

$$\min_{\bar{\mathbf{u}} \in \Omega \subseteq E^{mP}} J_k(\bar{\mathbf{u}}) = \min_{\bar{\mathbf{u}} \in \Omega \subseteq E^{mP}} \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_{\theta} \subseteq E^s} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) \bar{\mathbf{u}} + 2\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})^T \bar{\mathbf{u}} + g(\boldsymbol{\theta}). \quad (13)$$

В соответствии с идеологией прогнозирующего управления задача оптимизации (13) должна решаться достаточно быстро в режиме реального времени. В связи с этим с целью экономии вычислительных ресурсов вместо точного ее решения сформируем алгоритм поиска приближенного решения. Предлагаемый алгоритм состоит из следующих действий, которые выполняются на каждом такте функционирования системы:

1) в качестве начального приближения $\bar{\mathbf{u}}_0$ на текущем такте k принимается оптимальное программное управление, найденное на предыдущем такте;

2) вместо допустимого множества Ω_{θ} рассматривается конечная сетка, узлы которой принадлежат данному множеству, и вычисляется значение функционала $J_k(\bar{\mathbf{u}}_0)$ по формуле (12). При этом вместо решения задачи максимизации осуществляется перебор конечного числа вариантов, среди которых выбирается тот, для которого квадратичная функция принимает наибольшее значение;

3) на i -ой итерации вычисляется следующее приближение $\bar{\mathbf{u}}_{i+1}$ на основе предыдущей точки $\bar{\mathbf{u}}_i$ в соответствии с выбранным методом нелинейного программирования; отметим, что для этого, как правило, требуется вычислить значение целевой функции еще в нескольких точках;

4) вычисляется значение минимизируемого функционала $J_k(\bar{\mathbf{u}}_{i+1})$ в точке $\bar{\mathbf{u}}_{i+1}$, номер итерации увеличивается на единицу и осуществляется переход к пункту 3;

5) вычисления продолжают до тех пор, пока не будет выполнен один из критериев остановки

численного метода оптимизации.

Рассмотрим применение изложенного подхода к управлению системой магнитной левитации. Как было отмечено ранее, неточность математической модели (3) определяется коэффициентом a_{21} , который может варьироваться в пределах $a_{21} \in [a_{21}^{\min}, a_{21}^{\max}]$. Сформируем на основе модели (3) прогнозирующую модель (7), используя один из методов дискретизации. Тогда компоненты матриц **A** и **B** полученной модели будут зависеть от коэффициента a_{21} , а задача оптимизации (13) примет следующую форму:

$$\min_{\bar{\mathbf{u}} \in E^{mP}} J_k(\bar{\mathbf{u}}) = \min_{\bar{\mathbf{u}} \in E^{mP}} \max_{a_{21} \in [a_{21}^{\min}, a_{21}^{\max}]} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}(a_{21}) \bar{\mathbf{u}} + 2\mathbf{f}(a_{21})^T \bar{\mathbf{u}} + g(a_{21}). \quad (14)$$

Отметим, что допустимое множество Ω в данном случае совпадает с пространством E^{mP} , так как на управление не накладывается никаких дополнительных ограничений.

В соответствии с приведенным выше алгоритмом решения задачи (13) разобьем отрезок $a_{21} \in [a_{21}^{\min}, a_{21}^{\max}]$ на N равных частей, так что $\Delta a_{21} = \frac{a_{21}^{\max} - a_{21}^{\min}}{N}$. В результате получим конечную сетку с фиксированным шагом Δa_{21} . Вычислим значение функционала $J_k(\bar{\mathbf{u}})$ для заданного программного управления $\bar{\mathbf{u}}$. Для этого в каждом узле построенной сетки найдем значение квадратичной функции и выберем максимальное из них по параметру a_{21} . Далее, используя один из известных численных методов безусловной оптимизации, определим такой вектор $\bar{\mathbf{u}}^*$, при котором достигается минимум функционала $J_k(\bar{\mathbf{u}})$.

В качестве итога, запишем алгоритм формирования робастного оптимального управления на основе МРС-подхода. Алгоритм состоит из следующих действий.

1. Задать начальный вектор $\bar{\mathbf{u}}_0$.
2. Вычислить значение функционала $J_k(\bar{\mathbf{u}}_0)$, используя конечный перебор на построенной сетке.
3. На i -ой итерации вычислить следующее приближение $\bar{\mathbf{u}}_{i+1}$ на основе предыдущей точки $\bar{\mathbf{u}}_i$ в соответствии с выбранным методом безусловной оптимизации.
4. Вычислить значение минимизируемого функционала $J_k(\bar{\mathbf{u}}_{i+1})$ в точке $\bar{\mathbf{u}}_{i+1}$, номер итерации увеличить на единицу и перейти к пункту 3.
5. Продолжать вычисления до тех пор, пока не будет выполнен один из критериев остановки численного метода оптимизации.

Синтез робастных законов управления на основе частотного подхода

Рассмотрим вопрос построения робастного закона управления на основе частотного подхода и линейно-квадратичной оптимизации.

Для начала запишем линейную математическую модель магнитной левитации в матричной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}_n \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_n \bar{\mathbf{u}}, \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь \mathbf{A}_n , \mathbf{B}_n и \mathbf{C}_n – матрицы номинальной модели (3). Так как измеряется неполный вектор состояния, сформируем асимптотический наблюдатель следующего вида

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_n \mathbf{z} + \mathbf{B}_n \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{C}_n \mathbf{z}), \quad (16)$$

где $\mathbf{z} \in E^3$ – вектор состояния наблюдателя, а \mathbf{G} – матрица коэффициентов, которая выбирается из условия гурвицевости характеристического полинома наблюдателя. В частности, это может быть сделано с использованием модального синтеза.

Далее, выполним синтез линейно-квадратичного регулятора (LQR-регулятора) для модели (15) и функционала (6). В результате получим базовый стабилизирующий закон управления $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{K}\mathbf{x}$. Отметим, что его практическая реализация осуществляется с использованием выхода асимптотического наблюдателя, то есть в соответствии с равенством

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{K}\mathbf{z}. \quad (17)$$

Применим преобразование Лапласа к системе (16) при нулевых начальных условиях и выразим значение \mathbf{z} . В результате получим

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}_1(s)\bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{F}_{21}(s) \ \mathbf{F}_{22}(s)) \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $\mathbf{F}_1(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A}_n + \mathbf{G}\mathbf{C}_n)^{-1}\mathbf{B}_n$, $\mathbf{F}_2(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A}_n + \mathbf{G}\mathbf{C}_n)^{-1}\mathbf{G}$, а $\mathbf{F}_{21}(s)$ и $\mathbf{F}_{22}(s)$ – первый и второй столбцы матрицы $\mathbf{F}_2(s)$ соответственно. Обратимся теперь к уравнению (4), представляющему математическую модель магнитной левитации в tf-форме, и запишем его в следующем виде:

$$\bar{y}_1 = P_{n1}(s)\bar{u}, \quad \bar{y}_2 = P_{n2}(s)\bar{u}. \quad (19)$$

Тогда, подставив (18) и (19) в уравнение (17) и, разрешив его относительно $\bar{\mathbf{u}}$, получим

$$\bar{\mathbf{u}} = K(s)\bar{y}_1, \quad (20)$$

где $K(s) = \frac{\mathbf{K}\mathbf{F}_{21}(s)}{1 - \mathbf{K}\mathbf{F}_1(s) - \mathbf{K}\mathbf{F}_{22}(s)P_{n2}(s)}$. Таким образом, в результате проведенных преобразований показано, что динамический регулятор (16), (17) может быть представлен в эквивалентной форме (20).

Рассмотрим вопрос робастной устойчивости, то есть построения предельно допустимых границ изменения модели объекта, которые не приводят к потере устойчивости замкнутой регулятором (20) системы. Для этого воспользуемся частотным подходом, подробно изложенным в работе [1]. Согласно [1], достаточным условием сохранения устойчивости является выполнение следующего неравенства:

$$|\Delta_0(j\omega)| = \left| \frac{P_1(j\omega) - P_{n1}(j\omega)}{P_{n1}(j\omega)} \right| < \frac{1}{|T(j\omega)|}, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty), \quad (21)$$

где $P_1(s)$ – передаточная функция возмущенного объекта, $P_{n1}(s)$ – номинальная передаточная функция, $\Delta_0(s)$ – относительное возмущение модели, а передаточная функция $T(s) = K(s)(1 + P_n(s)K(s))^{-1}P_n(s)$. При этом отношение $1/|T(j\omega)|$ в правой части рассматриваемого неравенства задает частотную границу робастной устойчивости, которая определяет допустимый "коридор" вариации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) $A(\omega) = |P_1(j\omega)|$ возмущенной модели объекта. Если функция $A(\omega)$ находится в пределах указанного частотного "коридора", то гарантируется сохранение устойчивости замкнутой системы с возмущенной моделью объекта для регулятора (20).

Важно отметить, что ширину частотного "коридора" можно варьировать с помощью изменения коэффициентов весовой матрицы \mathbf{Q} и числа r в функционале (6), а также полюсов асимптотического наблюдателя (16), которые выбираются с учётом того, что вариации АЧХ возмущенной модели объекта должны лежать в пределах границ робастной устойчивости.

В итоге, сформируем следующий алгоритм синтеза робастного закона управления, который основан на использовании частотного подхода и является модификацией линейно-квадратичного синтеза. Алгоритм состоит из следующих действий.

1) Вычислить матрицу \mathbf{K} LQR-регулятора для номинальной математической модели (15) и функционала (6).

2) Задать вектор \mathbf{p} желаемых корней характеристического полинома асимптотического наблюдателя (16) и вычислить соответствующую матрицу \mathbf{G} коэффициентов при невязках.

3) Вычислить передаточную функцию $K(s)$ динамического регулятора (20) и соответствующую передаточную функцию $T(s) = K(s)(1 + P_n(s)K(s))^{-1}P_n(s)$.

4) Построить частотную границу робастной устойчивости, обеспечиваемую регулятором $K(s)$.

5) Если полученный частотный "коридор" включает АЧХ возмущенных моделей объекта при вариации параметра a_{21} в диапазоне $[a_{21}^{\min}, a_{21}^{\max}]$, то полученный регулятор вида (20) принимается в качестве решения поставленной задачи. В противном случае необходимо изменить вектор \mathbf{p} желаемых корней наблюдателя, либо весовые матрицу \mathbf{Q} и множитель r функционала (6), и перейти к п. 1.

Таким образом, необходимо выбирать настраиваемые элементы \mathbf{p} , \mathbf{Q} и r таким образом, чтобы, во-первых, АЧХ возмущенного объекта при любых вариациях параметра a_{21} находилась в пределах границ робастной устойчивости, а во-вторых, обеспечивалось необходимое качество переходного процесса.

Примеры имитационного моделирования

Рассмотрим примеры имитационного моделирования процессов управления системой магнитной

левитации. Зададим следующие параметры алгоритма управления с прогнозом: период дискретизации $T_s = 0.002$ с, горизонт прогноза $P = 100$, весовая матрица $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$, весовой множитель $\lambda = 1$. При реализации MPC-регулятора будем также использовать дискретный вариант асимптотического наблюдателя.

Далее, выберем параметры робастного алгоритма управления, построенного на основе LQR-регулятора: весовая матрица $\mathbf{Q} = \text{diag}([10, 10, 200])$, весовой множитель $\lambda = 0.01$, корни характеристического полинома наблюдателя $\mathbf{p} = (-5, -180, -200)^T$. Важно отметить, что такой выбор параметров обеспечивает робастную устойчивость замкнутой регулятором системы при вариации коэффициента a_{21} в пределах $\pm 20\%$ от номинального значения. Это продемонстрировано на рис. 1, где границы робастной устойчивости обозначены пунктирной линией, а также приведены АЧХ номинальной модели и возмущенных моделей объекта, соответствующих значениям коэффициента $a_{21} = 0.8a_{21}^0$ и $a_{21} = 1.2a_{21}^0$.

В качестве начальных условий для проведения моделирования примем вектор $\mathbf{x}_0 = (0.002, 0, 0.286)^T$. На рис. 2 представлены графики переходных процессов по смещению шарика $x_1 = x_b$ при номинальном значении коэффициента a_{21} . Как видно из рисунка, при выбранных параметрах алгоритмов управления время переходного процесса для LQR-регулятора меньше, чем для MPC-регулятора. Однако энергетические затраты в первом случае выше, чем во втором, и при введении дополнительных ограничений на величину управляющего сигнала качество процессов для LQR-регулятора может ухудшиться. Отметим также, что в отличие от MPC-регулятора в рамках частотного подхода обеспечение желаемых границ робастной устойчивости приводит к тому, что полюса динамического регулятора (20) смещаются влево от мнимой оси так, чтобы обеспечить достаточно большой запас устойчивости. В частности, смещаются полюса асимптотического наблюдателя, что делает его более чувствительным к влиянию шума измерений.

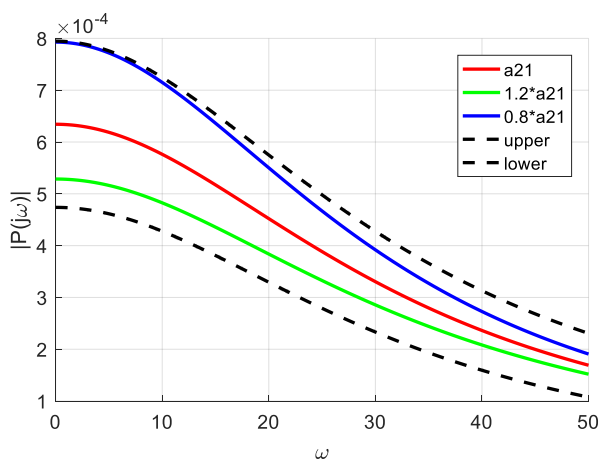


Рис. 1. Границы робастной устойчивости и АЧХ номинальной и возмущенных моделей

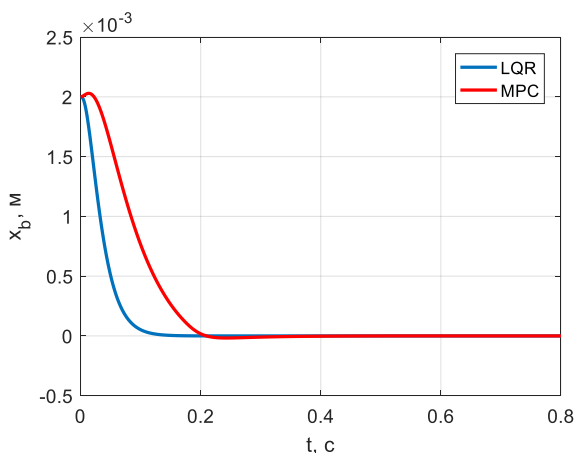


Рис. 2. Переходные процессы по смещению шарика $x_1 = x_b$ при номинальном значении a_{21}

На рис. 3 представлены графики переходных процессов по смещению шарика $x_1 = x_b$ при значении значения коэффициента $a_{21} = 1.2a_{21}^0$.

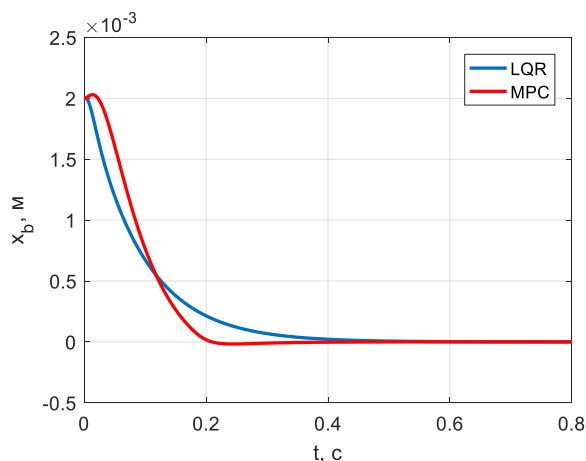


Рис. 3. Переходные процессы по смещению шарика $x_1 = x_b$ для значения $a_{21} = 1.2a_{21}^0$

Из рисунка видно, что здесь качество процессов для MPC-регулятора несколько лучше, чем для LQR-регулятора. В целом оба приведенных алгоритма позволяют обеспечить желаемое качество процессов управления системой магнитной левитации с учетом неточностей ее математической модели. При этом MPC-регулятор показывает лучшие результаты при наличии шума в измерениях и дополнительных ограничениях на управляющие и контролируемые переменные.

Заключение

В работе предложены два различных оптимизационных подхода к синтезу робастных законов управления. Выполнен их сравнительный анализ на примерах имитационного моделирования для системы магнитной левитации. Важно отметить, что разработанные алгоритмы могут быть использованы для управления подвижными объектами различных классов. В частности, подход, основанный на прогнозирующих моделях, может быть применен в задачах с ограничениями на управляющие и контролируемые переменные, а также для нелинейных моделей объектов управления.

Благодарности

Работа поддержана Грантом РФФИ № 17-07-00361а.

Литература

1. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью: учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2013. – 448 с.
2. Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in systems and control theory. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. – 193 p.
3. Doyle J. C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties // IEE Proc. Pt. D: Control theory and applications. — 1982. — Vol. 129, no. 6. — P. 242-250.
4. Kwakernaak H. H2-optimization – Theory and applications to robust control design // Annual Reviews in Control. – 2002. – Vol. 26, Issue 1. – P. 45-56.
5. Сотникова М.В. Синтез робастных алгоритмов управления с прогнозирующими моделями // Системы управления и информационные технологии. – Т. 50, № 4. – 2012. – С. 99-102.
6. MAGLEV: Magnetic Levitation Plant. User Manual. – Quanser Inc. – Ontario, Canada, 2006. – 18 p.
7. Camacho E. F., C. Bordons. Model Predictive Control. – 2nd ed. – London: Springer-Verlag, 2004. – 405 p.
8. Веремей Е.И., Сотникова М.В. Управление с прогнозирующими моделями. Учебное пособие. – Воронеж: ООО "Издательство "Научная книга", 2016. – 214 с.

References

1. Veremey E.I. Lineynye sistemy s obratnoi svyaz'yu: uchebnoe posobie. – SPb.: Izdatel'stvo «Lan'», 2013. – 448 s.
2. Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in systems and control theory. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. – 193 p.
3. Doyle J. C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties // IEE Proc. Pt. D: Control theory and applications. — 1982. — Vol. 129, no. 6. — P. 242-250.
4. Kwakernaak H. H2-optimization – Theory and applications to robust control design // Annual Reviews in Control. – 2002. – Vol. 26, Issue 1. – P. 45-56.
5. Sotnikova M.V. Syntezh robustnyh algoritmov upravleniya s prognoziryuschimy modelyamy // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. – Vol. 50, № 4. – 2012. — S. 99-102.
6. MAGLEV: Magnetic Levitation Plant. User Manual. – Quanser Inc. – Ontario, Canada, 2006. – 18 p.
7. Camacho E. F., C. Bordons. Model Predictive Control. – 2nd ed. – London: Springer-Verlag, 2004. – 405 p.

8. Veremey E.I., Sotnikova M.V. Upravlenie s prognoziryuyuschimy modelyamy. Uchebnoe posobie. – Voronezh: Izdatel'stvo "Nauchnaya kniga", 2016. – 214 s.

Об авторах:

Сотникова Маргарита Викторовна, доктор физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет, m.sotnikova@spbu.ru

Гилязова Юлия Андреевна, бакалавр, кафедра компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет, ug114@bk.ru

Селицкая Екатерина Александровна, ассистент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет, velikova_e@mail.ru

Note on the authors:

Sotnikova Margarita V., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Computer Applications and Systems, Saint-Petersburg State University, m.sotnikova@spbu.ru

Gilyazova Julia A., bachelor, Department of Computer Applications and Systems, Saint-Petersburg State University, ug114@bk.ru

Selitskaya Ekaterina A., Assistant of Department of Mechanics of Controlled Motion, Saint-Petersburg State University, velikova_e@mail.ru