

Визуализация больших графов и матрицы смежности

З.В. Апанович

*Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирск
apanovich@iis.nsk.su*

Аннотация. Экспоненциальный рост размеров таких графов, как социальные сети, Интернет графы и др. требует новых подходов к их визуализации. Наряду с представлениями типа «диаграммы связей вершин» все чаще используются визуализации матриц смежностей, а также разнообразные комбинации этих представлений. В данном обзоре рассматриваются новые подходы к визуализации графов большого объема при помощи матриц смежностей, и приводятся примеры приложений, где эти подходы применяются. Описываются различные типы шаблонов, возникающие при упорядочении матриц смежностей, соответствующих современным сетям, и алгоритмы, позволяющие выделять эти шаблоны. В частности, демонстрируется, как использование методов упорядочения матриц совместно с алгоритмами поиска таких шаблонов как звезды, ложные звезды, цепи, почти клики, полные клики, двудольные ядра и почти двудольные ядра позволяют создавать понятные визуализации графов с миллионами вершин и ребер. Также приводятся примеры гибридных визуализаций, использующих диаграммы связей вершин для представления неплотных частей графа, а матрицы смежностей для представления плотных частей и их приложений. Гибридные методы используются для визуализации глубоких нейронных сетей, сравнения сетей связности человеческого мозга и др.

Ключевые слова: графы большого объема, визуализация, матрицы смежности, жгуты ребер

Visualization of large graphs and adjacency matrices

Z.V. Apanovich

*A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk
apanovich@iis.nsk.su*

Abstract. Exponential size growth of such graphs as social networks, Internet graphs, etc. requires new approaches to their visualization. Along with node-link diagram representations, adjacency matrices and various hybrid representations are increasingly used for large graphs visualizations. This survey discusses new approaches to the visualization of large graphs using adjacency matrices and gives examples of applications where these approaches are used. We describe various types of patterns arising when adjacency matrices corresponding to modern networks are ordered, and algorithms making it possible to reveal these patterns. In particular, the use of matrix ordering methods in conjunction with algorithms looking for such graph patterns as stars, false stars, chains, near-cliques, full cliques, bipartite cores and near-bipartite cores enable users to create understandable visualizations of graphs with millions of vertices and edges. Examples of hybrid visualizations using node-link diagrams for representing sparse parts of a graph and adjacency matrices for representing dense parts are also given. The hybrid methods are used to visualize deep neural networks, to compare networks of the human brain connectivity, etc.

Keywords: large graphs, visualization, adjacency matrices, edge bundles

В последние годы размер графов, нуждающихся в обработке, возрастает экспоненциально. Например, в англоязычной части Википедии насчитывается более 5.6 миллионов взаимосвязанных статей, Amazon предлагает миллионы продуктов, с ребрами, соединяющими каждый элемент с другими похожими продуктами. Граф YahooWeb охватывает более 1,4 миллиарда веб-страниц и 6,6 миллиарда ссылок, а сеть связности типичного человеческого мозга насчитывает 100 миллиардов взаимосвязанных нейронов. Размеры и сложность этих графов являются проблемой для существующих алгоритмов обработки, в частности, для алгоритмов визуализации. В последнее время достигнут большой прогресс алгоритмов визуализации графов, относящихся к классу диаграмм связей вершин (node-link), изображающих графы при помощи глифов, соответствующих вершинам, соединенных прямыми или ломаными линиями, соответствующими ребрам. Эти алгоритмы позволяют визуализировать графы, содержащие несколько миллионов вершин, но они применимы в основном к большим разреженным графам. В связи с этой особенностью в последние годы в очередной раз усилился интерес к визуализации графов при помощи матриц смежностей, где каждый элемент

матрицы $a_{ij} \in A$ указывает на наличие или отсутствие ребра между вершинами i и j соответствующего графа G . В работе [1] показано, что визуализации матриц смежности превосходят диаграммы связей узлов при изображении больших и плотных графов. Также весьма информативные визуализации возникают при сочетании диаграмм связей вершин и матриц смежностей. В данном обзоре рассматриваются визуальные шаблоны и целевые функции, используемые для упорядочения матриц смежности, методы визуализации очень больших графов на основе упорядочения матриц смежности, а также гибридные методы визуализации графов.

1. Целевые функции и шаблоны при упорядочении матриц смежностей

Основным шагом при визуализации матриц смежностей является упорядочение строк и столбцов, направленное на выявление скрытых структурных шаблонов в графовых данных. В настоящее время известно огромное количество алгоритмов упорядочения матриц, которые условно можно разделить на 2 большие группы: либо оптимизация некоторой целевой функции, либо попытка выделения блочной структуры.

Алгоритмы упорядочения матриц пытаются оптимизировать некоторую целевую функцию, полезную для операций, связанных с сетью. В работе [2] описаны наиболее распространенные целевые функции, такие как минимальное линейное упорядочение (Minimum Linear Arrangement, MinLA), ширина полосы пропускания (BandWidth), ширина разреза, профиль, бисекция ребер, бисекция вершин и др. Одной из наиболее популярных функций, используемых для оценки качества упорядочения матриц, является MinLA, минимизирующая сумму расстояний между концевыми вершинами ребер графа:

$$LA(\varphi, G) = \sum_{(u,v) \in E} |\varphi(u) - \varphi(v)|.$$

Функция $\varphi(v)$ присваивает уникальный целочисленный индекс каждой вершине графа G .

Вторая группа алгоритмов ориентирована на выделение блочно-диагональных структур. Они тоже известны достаточно давно [3]. Большинство этих методов, под названием разбиение матриц и кластеризация блоков происходят из области биоинформатики.

В последнее время появляется все больше визуальных шаблонов, которые хотелось бы выявлять при хорошем упорядочении матриц смежности. Наиболее распространенные шаблоны, которые регулярно встречаются в различных публикациях, показаны на Рис. 1:

а) *блочно-диагональный шаблон* состоит из блоков на диагонали матрицы. Когерентные прямоугольные области появляются в упорядоченных матричных изображениях всякий раз, когда сильно связанные компоненты или клики присутствуют в базовой топологии. Четкие блочные шаблоны позволяют

подсчитывать количество кластеров, оценивать наложение кластеров, сравнивать размеры кластеров. Во многих сетях встречаются блочные шаблоны с отсутствующими вершинами или внедиагональные точки, соответствующие связям с другими кластерами;

б) *блочно-внедиагональный шаблон*, соответствует либо двусвязной компоненте, либо подшаблонам блочного шаблона. В случае двусвязной компоненты это может соответствовать, например, отношениям между авторами и их произведениями.

в) *шаблон крест/звезда* возникает в случае, когда вершина связана с большим количеством других вершин (вершина-хаб);

г) *шаблон полоса* выглядит как вне-диагональные непрерывные линии и соответствуют путям или цепям в графе;

д) *анти-шаблон шум* появляется в случаях, когда алгоритм упорядочения не способен выявить имеющуюся структуру графа, или никакой структуры нет.

е) *анти-шаблон полоса пропускания* визуальнo группирует не-нулевые элементы (связи) внутри области вокруг диагонали. Такие анти-шаблоны часто возникают в результате применения алгоритмов поиска в ширину, где внешняя граница соответствует критерию останова при переборе.

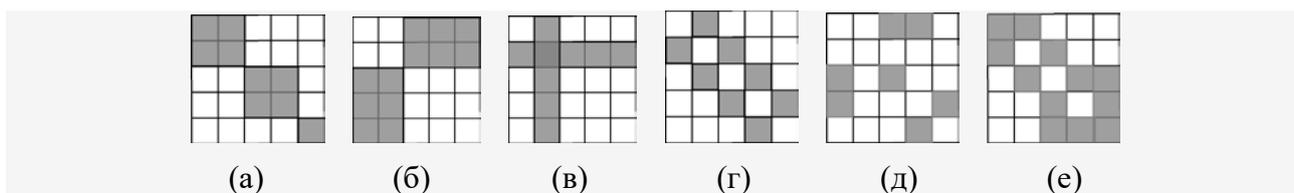


Рис. 1. Примеры шаблонов и анти-шаблонов (а) блочно-диагональный шаблон, (б) блочно-внедиагональный шаблон, (в) шаблон крест/звезда, (г) шаблон полоса, (д) анти-шаблон шум, (е) анти-шаблон полоса пропускания

Как было сказано в предыдущем разделе, основная масса алгоритмов упорядочения ориентирована на выделение блочных шаблонов. Современные исследования ведутся в двух направлениях: с одной стороны продолжается поиск новых алгоритмов упорядочения, направленных на выявление новых шаблонов, с другой стороны, явное выделение топологических структур, таких как хабы и двудольные подграфы используется для построения новых упорядочений. Про это более подробно будет сказано в следующем разделе.

В последние годы появились работы, позволяющие использовать вышеописанные шаблоны для анализа коллекций матричных визуализаций. Например, подход Magnostics [4] оценивает матричные представления в соответствии с наличием специфических визуальных шаблонов, таких как блоки и линии, указывающих на существование таких структур, как кластеры, двудольные ядра или хабы. Magnostics может использоваться для анализа, ответов на запросы и поиска визуально похожих матриц в больших коллекциях или для оценки качества алгоритмов матричного переупорядочения. Также эта

методика применима для анализа изменения во времени динамических сетей, таких как сети связности человеческого мозга.

2. Известные реализации алгоритмов упорядочения матриц и их сравнение

Большинство алгоритмов переупорядочения доступны в публичных библиотеках, хотя ни одна библиотека пока что не реализует все известные алгоритмы упорядочения. Пакеты R *corrplot* [5], *biclust* [6] и *seriation* [7] обеспечивают большое количество алгоритмов упорядочения для табличных данных. Несколько графовых алгоритмов доступны в C++ библиотеке Boost [8], а библиотека Reorder.js [9] предоставляет множество алгоритмов упорядочения в JavaScript.

Несмотря на большое количество обзоров, посвященных матрицам смежности [10], проблема оценки качества упорядочения и понимания того, какие шаблоны являются артефактами алгоритмов, а какие шаблоны представляют определенные структуры в данных, имеет решающее значение и по сей день. С этой точки зрения огромный интерес представляет один из последних обзоров [11], использующий следующую методологию. Для эмпирического сравнения были собраны 35 реализаций разных алгоритмов матричного переупорядочивания, взятые из разных библиотек. Собранные реализации алгоритмов были разбиты на семь основных категорий, таких как Робинзоновские, Спектральные, Уменьшение размерности, Эвристические, Теоретико-графовые, Би-кластеризации и интерактивные (управляемые пользователем). Затем были выбраны 150 графов различного происхождения, различающиеся как по размеру от малых (25-100 вершин) до относительно больших (100-1500 вершин), так и по плотности от разреженных (плотность 0,05-0,28) до плотных (плотность 0,28-0,6). Для всех 150 графов, были созданы изображения упорядоченной матрицы смежности, которые использовались в качестве входных данных для оценки показателей эффективности. Это позволило получить в общей сложности 4348 изображений для 5250 переупорядоченных матриц в качестве основы для сравнения (некоторые упорядочения выдали ошибочные результаты). Все алгоритмы сравнивались по быстрдействию, а полученные изображения по качеству упорядочения. (<http://matrixreordering.dbvis.de>). Наиболее быстрыми оказались алгоритмы, отнесенные к теоретико-графовой группе [12-14], много-шкальные [15] и некоторые робинзоновские алгоритмы [16-17].

Для оценки качества упорядочения, использовалась функция LA (Linear Arrangement). Оказалось, что и для этой меры лучше всего себя опять показали теоретико-графовые методы, такие как [14, 18], превосходя такие алгоритмы как спектральные методы, робинзоновские и методы би-кластеризации.

Было отмечено, что хотя в идеале хотелось бы иметь конкретное руководство по выбору алгоритма и того, какие параметры следует использовать по отношению к определенным данным и задачам, осталось

слишком много открытых исследовательских вопросов, чтобы обеспечить формальные и надежные рекомендации на данном этапе.

3. Визуализация матриц смежностей большого и очень большого объема

Несмотря на то, что существующие системы визуализации диаграмм связей узлов способны изображать очень большие графы с миллионами вершин, они плохо справляются с плотными графами, содержащими большое количество ребер. В то же время, благодаря тому, что в матрицах смежности ребро может занимать всего один пиксель на дисплее, они очень популярны при изображении плотных графов. Однако, даже с одним ребром на пиксель, можно визуализировать не более нескольких миллионов ребер. Работы Matrix Zoom [19] и ZAME [20] расширяют подход с одним ребром на пиксель путем слияния узлов и ребер в блоки с помощью алгоритмов кластеризации, создавая матрицу смежности, где каждая позиция представляет собой набор ребер в иерархической агрегации. Однако авторы подхода SlashBurn [21] обратили внимание на то, что большинство графов реального мира подчиняются степенному закону распределения степеней вершин. То есть, в них имеется несколько узлов-"хабов", имеющих очень высокие степени, а большинство узлов имеют низкую степень. Эти хабы хорошо связаны с большинством узлов графа, объединяя все мелкие сообщества в одно огромное сообщество. Поэтому крупные сети легко разрушаются упорядоченным удалением узлов-хабов. После каждого удаления хаба появляется небольшой набор несвязных компонент (спутников), в то время как большинство узлов по-прежнему принадлежат гигантской связной компоненте. Упорядочение SlashBurn выполняет итеративно два этапа:

- а) узлы с наибольшей степенью удаляются из исходного графа;
- б) узлы переупорядочиваются таким образом, что узлы с высокой степенью располагаются в матрице смежности ближе к началу координат, несвязные компоненты смещаются на периферию, а гигантская связная компонента - к середине матрицы.

На следующих итерациях эти же шаги применяются к гигантской связной компоненте. На Рис. 2(а) и 2(б) показаны визуализации графа Weibo-KDD, имеющего 1 944 589 вершин и 50 655 143 ребер, до и после применения алгоритма упорядочения SlashBurn. Можно видеть, что SlashBurn собирает ненулевые элементы матрицы смежностей в левой, нижней и диагональной части матрицы смежностей, порождая форму, похожую на стрелу.

Упорядочение SlashBurn можно использовать для визуализации очень больших графов, количество вершин в которых превышает миллиард, и, значит, размер матрицы смежности может легко превысить разрешение типичного экрана. В работе [22] проблема решается построением проекции исходной матрицы в матрицу меньшего размера, которая может быть показана на типичном экране. Например, матрица размером 1 миллиард на 1 миллиард

проецируется в матрицу 1000 на 1000, где значение элемента «уплотненной» устанавливается равным количеству ненулевых элементов в соответствующей подматрице исходной матрицы. Однако эта проекция порождает вторую задачу: «уплотненная» матрица будет почти полной в большинстве случаев. То есть, простое линейное масштабирование теряет информацию о тонких различиях малых значений.

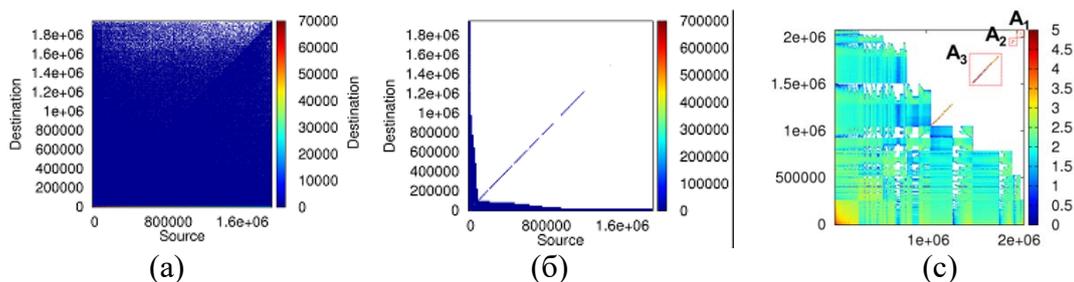


Рис. 2. (а, б) Матрица смежности графа Weibo-KDD до и после применения алгоритма упорядочения SlashBurn [21]. (с) Матрица смежности графа US Patent упорядоченная при помощи алгоритма Net-Ray [22].

Для решения проблемы полной матрицы *перед* равномерным сжатием применяется алгоритм SlashBurn, который переупорядочивает узлы и создает огромные пустые области в результирующей уплотненной матрице. В дополнение к переупорядочению узлов, авторы решают задачу «полной матрицы» с помощью логарифмического масштабирования числового значения каждого элемента матрицы смежностей (вариант 1-LOG), а также логарифмического масштабирования осей x и y вместе с числовыми значениями каждого элемента (вариант 3-LOG). В результате удается получить изображение большого графа US patent, имеющего 6 009 555 вершин и 10 565 431 ребер (Рис. 2(с)). Визуализация позволяет различать плотные и разреженные области графа, а также сообщества, слабо связанные с остальной частью графа (обозначены как A1, A2 и A3).

Следующим шагом на пути к визуализации очень больших графов становится построение матриц смежности, изображающей связи между разнообразными подструктурами, выделяемым из исходного графа.

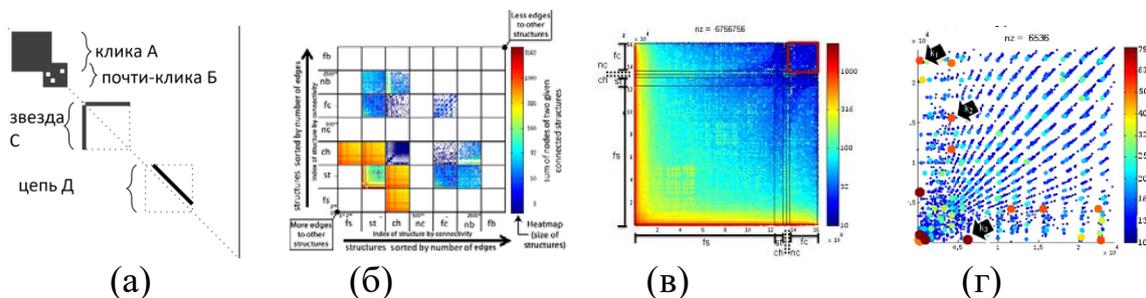


Рис. 3. (а) схема упорядочения подструктур в матрице смежностей алгоритмом VOG [23], (б) схема упорядочения подструктур в матрице смежностей алгоритмом StructMatrix [24], (в) визуализация всего графа DBLP при помощи алгоритма StructMatrix, (г) визуализация участка связей между полными кликами при помощи алгоритма StructMatrix.

Словарь выделяемых структур VOG[23] содержит полные и почти клики, полные и почти двусвязные ядра, цепи и звезды, а словарь StructMatrix [24] содержит еще элемент ложная звезда. В дополнение к возможностям масштабирования, связанным с выделением подструктур, алгоритм StructMatrix реализует возможность динамической проекции исходной большой матрицы в матрицу меньшего размера, позволяющей строить изображения графа с различными разрешениями. На Рис. 3(а) и 3(б) показан порядок расположения структур программой VOG[23] и StructMatrix [24]. В результате авторам StructMatrix удалось изобразить понятным образом граф DBLP, насчитывающий 1 366 099 вершин, 5 716 654 ребер. (Рис. 3 (в), (г)).

4 Гибридные изображения, сочетающие матрицы смежности и диаграммы связей узлов

Структура социальных сетей может изменяться от очень разреженных (генеалогические деревья) до очень плотных (экспорт и импорт между странами). К промежуточной категории относятся сети малого мира, которые встречаются очень часто, включая многие сети знакомств, а также глобальный Интернет. Для визуализации социальной сети наиболее важным из этих свойств является высокий коэффициент кластеризации, соответствующий наличию многих локально плотных кластеров и небольшого количества узлов -хабов, соединяющих граф, который является глобально разреженным.

В одной из наиболее цитируемых работ по визуализации информации представлена система NodeTrix [25], строящая гибридное представление для визуализации социальных сетей. В NodeTrix парадигма связи узлов используется для визуализации общей структуры сети, матрицы смежности показывают отдельные сообщества, а меж-кластерные ребра изображаются в виде кривых, соединяющих границы отдельных матриц.

Идея NodeTrix оказалось весьма продуктивной, что привело как к значительному количеству приложений, использующих NodeTrix, так и к другим гибридным визуализациям. В частности, на рисунке 4(а) показан пример использования NodeTrix для поблочного сравнения сетей связности головного мозга [26]. Для каждой сети связности головного мозга визуальное представление на высоком уровне состоит из нескольких матриц, каждая из которых соответствует функциональному блоку мозга. Каждая строка/столбец в матрице смежности соответствует одной ROI (Region of Interest - высокоспециализированные области мозга), номер которой нарисован как метка на границе матрицы смежности. Внутри каждой матрицы элементы, изображенные как закодированные цветом ячейки, указывают на внутри-блочные соединения. Насыщенность красного цвета используется для отображения силы каждого соединения ROI. Для межблочных соединений ROI изогнутые жгуты ребер рисуются между матрицами, где две конечные точки находятся на краю исходного и целевого столбца/строки ROI. Визуализация демонстрирует, что в группе с высоким композитным индексом творчества

(CCI) значительно больше связей как внутри матриц смежностей, так и между ними, чем для группы населения с низким композитным индексом творчества.

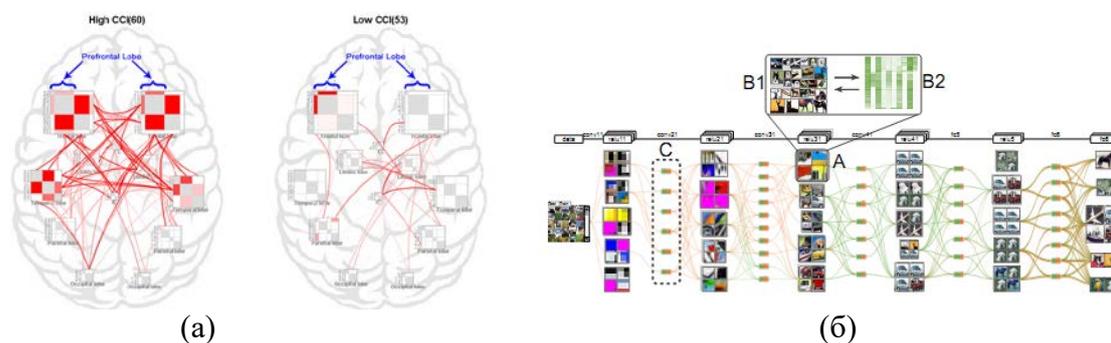


Рис. 4. (а) Визуальное сравнение сетей связности мозга у групп населения с высоким и низким композитным индексом творчества [26], (б) гибридное изображение глубоких сверточных нейронных сетей [31]

С точки зрения алгоритмов визуализации используется два алгоритма, собирающих межблочные ребра в жгуты [27-29]. Понятно, что метод NodeTrix может быть расширен для поддержки визуального сравнения многих других геопространственных сетей (например, динамический трафик и сети миграции), в которых имеются поблочные шаблоны связности, а позиции сетевых узлов фиксируются геопространственно. Наконец одно из недавних гибридных приложений MapTrix [30] изображает потоки людей или ресурсов между различными географическими локациями, в ситуациях, когда имеется много грузов и много точек назначения.

Другой тип гибридной визуализации, использующий матрицы смежности в качестве вершин поуровневого изображения графов, а также объединение ребер в жгуты, реализован в инструменте визуальной аналитики, позволяющем анализировать поведение глубоких сверточных нейронных сетей [31], которые могут содержать десятки или сотни слоев, тысячи нейронов в каждом слое и миллионы связей между нейронами (Рис. 4(б)).

Заключение

Наряду с изображениями диаграмм связей узлов, визуализация графов при помощи упорядоченных матриц смежностей становится все более популярной, особенно при построении изображений больших и плотных графов. Расширяется множество шаблонов, имеющих смысл для пользователя, возникает необходимость в новых алгоритмах, выявляющих новые шаблоны и их комбинации. Особенно перспективными выглядят гибридные изображения графов, сочетающие диаграммы связей узлов и матрицы смежностей, соединенные жгутами ребер.

Литература

1. Ghoniem, M., Fekete, J.D., Castagliola, P. On the readability of graphs using node-link and matrix-based representations: a controlled experiment and statistical analysis. //Information Visualization 4(2), 2005. — pp.114-135.
2. Díaz, J., Petit, J., Serna, M. A survey of graph layout problems. ACM Comput. Surv., 34 (3). 2002. — pp. 313-356.
3. Hartigan, J. Direct clustering of a data matrix //Journal of the American Statistical Association, 67 (337) . — pp.123-129.
4. Behrisch M. et al., Magnostics: Image-Based Search of Interesting Matrix Views for Guided Network Exploration //IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics, vol. 23, no. 1 . — 2017 . — pp. 31-40.
5. Wei T. Corrplot: Visualization of a correlation matrix // r package version 0.73. ed., . — 2013.
6. Kaiser S., Leicsh F.: A toolbox for bicluster analysis in r. —2008.
7. Hahsler M., Hornik K., Buchta C., Getting things in order: An introduction to the r package seriation// Journal of Statistical Software 25, 3. — 2008. —pp.1–34.
8. Siek J. G., Lee L.-Q., Lumsdaine A., The Boost Graph Library:User Guide and Reference Manual// Pearson Education. — 2001.
9. Fekete J.-D. Reorder.js: A JavaScript Library to Reorder Tables and Networks// IEEE VIS 2015, Oct. 2015. Poster. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01214274>. 5
10. Liiv I., Seriation and matrix reordering methods: An historical overview// Statistical analysis and data mining 3, 2. — 2010. — pp. 70–91.
11. Behrisch M., Bach B., Henry N. Riche, Schreck T., Fekete J.-D. Matrix Reordering Methods for Table and Network Visualization//EuroVis 2016. — Volume 35. — 2016.
12. Cuthill E., MCKee J., Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices// Proceedings of the 1969 24th National Conference (New York, NY, USA, 1969), ACM '69, ACM. — pp. 157–172.
13. King I. P., An automatic reordering scheme for simultaneous equations derived from network systems// International Journal for Numerical Methods in Engineering 2, 4. —1970. — pp. 523–533.
14. Sloan S. W., An algorithm for profile and wavefront reduction of sparse matrices// International Journal for Numerical Methods in Engineering 23, 2 (1986). — pp. 239–251.
15. Koren Y., Harel D., A multi-scale algorithm for the linear arrangement problem// Revised Papers from the 28th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (London, UK, UK, 2002), WG '02, Springer-Verlag. — pp. 296–309.
16. Hubert L., Some applications of graph theory and related nonmetric techniques to problems of approximate seriation the case of symmetric proximity measures// British Journal of Mathematical and Statistical Psychology 27, 2. —1974. — pp. 133–153.

17. Gruwaeus G., Wainer H., Two additions to hierarchical cluster analysis//British Journal of Mathematical and Statistical Psychology 25, 2 . —1972. — pp. 200–206.
18. George J. A., Computer implementation of the finite element method// PhD thesis, Stanford University. — 1971.
19. Abello J. van Ham F., Matrix zoom: A visual interface to semi-external graphs// IEEE InfoVis. — 2004. — pp. 183–190.
20. Elmqvist N., Do T.-N., Goodell H., Henry N., Fekete J., Zame: Interactive large-scale graph visualization// PacificVIS. — 2008. — pp. 215–222.
21. Kang U. , Faloutsos C., Beyond 'caveman communities': Hubs and spokes for graph compression and mining // ICDM. — 2011. — pp. 300–309.
22. Kang U., Lee J.-Y., Koutra D., Faloutsos C., “Net-ray: Visualizing and mining billion-scale graphs,” // Adv in Knowledge Discovery and Data Mining. Springer. —2014. — pp. 348–361.
23. Koutra D., Kang U., Vreeken J., Faloutsos C., Vog:Summarizing and understanding large graphs, // Proc. SIAM Int Conf on Data Mining (SDM), Philadelphia, PA. — 2014.
24. Gualdron H., Cordeiro R., Rodrigues J. StructMatrix: Large-scale visualization of graphs by means of structure detection and dense matrices // The Fifth IEEE ICDM Workshop on Data Mining in Networks. — 2015 pp.1—8.
25. Henry N., Fekete J.-D., McGun M. J. Nodetrix: a hybrid visualization of social networks // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 13.— 2007.—pp.1302-1309.
26. Yang X, Shi L, Daianu M, Tong H, Liu Q, Thompson P. Blockwise human brain network visual comparison using NodeTrix representation. IEEE Trans Vis ComputGraph 23(1).— 2017 .—pp. 181–190 .— doi: 10.1109/tvcg.2016.2598472
27. Holten D., Hierarchical Edge Bundles: Visualization of Adjacency Relations in Hierarchical Data// IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. — v.12, n.5.— 2006. — pp. 741-748.
28. Апанович З.В., Методы построения жгутов ребер для улучшения понимаемости информации//Проблемы управления и моделирования в сложных системах труды XV Международной конференции.—2013.— С. 439-445.
29. Апанович З.В., Винокуров П.С., Кислицина Т.А. Методы и средства визуализации больших научных порталов//Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии.— Т. 9. № 3.—2011.— С. 5-14.
30. Yang Y., Dwyer T., Goodwin S. , Marriott K., Many-to-Many Geographically-Embedded Flow Visualisation: An Evaluation// IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics.— vol. 23, no. 1.— 2017.— pp. 411-420.— doi:10.1109/TVCG.2016.2598885
31. Liu M., Shi J., Li Z., Li C., Zhu J., Liu S., Towards Better Analysis of Deep Convolutional Neural Networks// IEEE Transactions on Visualization &

References

1. Ghoniem, M., Fekete, J.D., Castagliola, P. On the readability of graphs using node-link and matrix-based representations: a controlled experiment and statistical analysis. //Information Visualization 4(2), 2005. — pp.114-135.
2. Díaz, J., Petit, J., Serna, M. A survey of graph layout problems. ACM Comput. Surv., 34 (3). 2002. — pp. 313-356.
3. Hartigan, J. Direct clustering of a data matrix //Journal of the American Statistical Association, 67 (337) . — pp.123-129.
4. Behrisch M. et al., Magnostics: Image-Based Search of Interesting Matrix Views for Guided Network Exploration //IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics, vol. 23, no. 1 . — 2017 . — pp. 31-40.
5. Wei T. Corrplot: Visualization of a correlation matrix // r package version 0.73. ed., . — 2013.
6. Kaiser S., Leicsh F.: A toolbox for bicluster analysis in r. —2008.
7. Hahsler M., Hornik K., Buchta C., Getting things in order: An introduction to the r package seriation // Journal of Statistical Software 25, 3. — 2008. —pp.1–34.
8. Siek J. G., Lee L.-Q., Lumsdaine A., The Boost Graph Library:User Guide and Reference Manual// Pearson Education. — 2001.
9. Fekete J.-D. Reorder.js: A JavaScript Library to Reorder Tables and Networks // IEEE VIS 2015, Oct. 2015. Poster. URL: <https://hal.inria.fr/hal-01214274>. 5
10. Liiv I., Seriation and matrix reordering methods: An historical overview // Statistical analysis and data mining 3, 2. — 2010. — pp. 70–91.
11. Behrisch M., Bach B., Henry N. Riche, Schreck T., Fekete J.-D. Matrix Reordering Methods for Table and Network Visualization // EuroVis 2016. — Volume 35. — 2016.
12. Cuthill E., MCKee J., Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices // Proceedings of the 1969 24th National Conference (New York, NY, USA, 1969), ACM '69, ACM. — pp. 157–172.
13. King I. P., An automatic reordering scheme for simultaneous equations derived from network systems// International Journal for Numerical Methods in Engineering 2, 4. —1970. — pp. 523–533.
14. Sloan S. W., An algorithm for profile and wavefront reduction of sparse matrices// International Journal for Numerical Methods in Engineering 23, 2 (1986). — pp. 239–251.
15. Koren Y., Harel D., A multi-scale algorithm for the linear arrangement problem// Revised Papers from the 28th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (London, UK, UK, 2002), WG '02, Springer-Verlag. — pp. 296–309.
16. Hubert L., Some applications of graph theory and related nonmetric techniques to problems of approximate seriation the case of symmetric proximity measures //

- British Journal of Mathematical and Statistical Psychology 27, 2 . —1974. — pp. 133–153.
17. Gruwaeus G., Wainer H., Two additions to hierarchical cluster analysis//British Journal of Mathematical and Statistical Psychology 25, 2 . —1972. — pp. 200–206.
 18. George J. A., Computer implementation of the finite element method// PhD thesis, Stanford University. — 1971.
 19. Abello J. van Ham F., Matrix zoom: A visual interface to semi-external graphs // IEEE InfoVis. — 2004. — pp. 183–190.
 20. Elmqvist N., Do T.-N., Goodell H., Henry N., Fekete J., Zame: Interactive large-scale graph visualization// PacificVIS. — 2008. — pp. 215–222.
 21. Kang U. , Faloutsos C., Beyond 'caveman communities': Hubs and spokes for graph compression and mining // ICDM. — 2011. — pp. 300–309.
 22. Kang U., Lee J.-Y., Koutra D., Faloutsos C., “Net-ray: Visualizing and mining billion-scale graphs,” // Adv in Knowledge Discovery and Data Mining. Springer. —2014. — pp. 348–361.
 23. Koutra D., Kang U., Vreeken J., Faloutsos C., Vog:Summarizing and understanding large graphs, // Proc. SIAM Int Conf on Data Mining (SDM), Philadelphia, PA. — 2014.
 24. Gualdrón H., Cordeiro R., Rodrigues J. StructMatrix: Large-scale visualization of graphs by means of structure detection and dense matrices // The Fifth IEEE ICDM Workshop on Data Mining in Networks. — 2015 pp.1—8.
 25. Henry N., Fekete J.-D., McGun M. J. Nodetrix: a hybrid visualization of social networks // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 13.— 2007.—pp.1302-1309.
 26. Yang X, Shi L, Daianu M, Tong H, Liu Q, Thompson P. Blockwise human brain network visual comparison using NodeTrix representation. IEEE Trans Vis ComputGraph 23(1).— 2017 .—pp. 181–190 .— doi: 10.1109/tvcg.2016.2598472
 27. Holten D., Hierarchical Edge Bundles: Visualization of Adjacency Relations in Hierarchical Data// IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics.— v.12, n.5.— 2006. — pp. 741-748.
 28. Apanovich Z.V., Metody postroeniia zhgutov reber dlia uluchsheniia ponimaemosti informatsii//Problemy upravleniia i modelirovaniia v slozhnykh sistemakh trudy XV Mezhdunarodnoi konferentsii.—2013.—S. 439-445.
 29. Apanovich Z.V., Vinokurov P.S., Kislitsina T.A. Metody i sredstva vizualizatsii bolshikh nauchnykh portalov//Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Serii: Informatsionnye tekhnologii.— T. 9. № 3.—2011. — S. 5-14.
 30. Yang Y., Dwyer T., Goodwin S. , Marriott K., Many-to-Many Geographically-Embedded Flow Visualisation: An Evaluation// IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics.— vol. 23, no. 1.— 2017.— pp. 411-420.— doi:10.1109/TVCG.2016.2598885
 31. Liu M., Shi J., Li Z., Li C., Zhu J., Liu S., Towards Better Analysis of Deep Convolutional Neural Networks // IEEE Transactions on Visualization &

Computer Graphics.— vol. 23, no. 1.— 2017. — pp. 91-100. —
doi:10.1109/TVCG.2016.2598831