

# Learning Mathematics in the Diversity: Play wit Divermates

C. S. González<sup>1</sup>, D. Guerra, H. Sanabria, M. Noda, A. Bruno, L. Moreno

Escuela Superior de Ingeniería Informática. Universidad de La Laguna. España  
<sup>1</sup>email: cjgonza@ull.es

**Summary.** “Divermates” is a multidisciplinary research project where there are involved people from different areas such as Computer Science, Didactic of Mathematics, Arts and professionals from the Association of Down' Syndrome of Tenerife (ATT21). This project has been supported by the Spanish Minister of Work and Social Services. In this project several tools and services has been created using new technologies. So, throw these tools we can analyse the errors and to find error patterns in the resolution of problems and algorithms in basic arithmetical operations (sum and reduces). This way, adapted aids and treatments for the different type errors can be created. In order to facilitate the interaction of this type of users with special needs, several adaptations have been made in the interface with the purpose of surpassing problems of this type of children such as: problems related to the language, difficulty in the transference and consolidation of learnings and problems of fine motricity.

**Keywords:** Accessibility, Special Needs, User Interface Design

## 1 Introducción

El acceso a la educación por parte de todas las personas forma parte de la lista de retos en las nuevas tecnologías. La diversidad existente en el rango de alumnos obliga a contemplar técnicas específicas para aquellos usuarios con necesidades educativas especiales. En esta línea, estamos desarrollando algunos proyectos de investigación en la Universidad de La Laguna, con el fin de facilitar la enseñanza de las matemáticas a niños con necesidades de educación especiales (NEE). En concreto, DiverMates pretende ser una herramienta didáctica que acerque las matemáticas a los alumnos con Síndrome de Down y NEE, así como para los profesores de los mismos. Los nuevos recursos informáticos creados en el marco del proyecto Divermates son los siguientes:

1. Sistema de interacción mediante interfaces accesibles, constituido por una pizarra digital con adaptación de la interface a nivel software (Flash), conectada a una base de datos (MySQL) por medio de PHP (en el caso del administrador de contenidos) o Python (en el módulo de detección de errores). En la base de datos se almacenarán los resultados de la interacción de los alumnos y los tipos de problemas y algoritmos que se han elaborado con el fin de analizar el comportamiento frente a los mismos de este tipo de alumnos y las causas de error. También incluye un sistema de autor para la

creación de actividades multimedia para el profesorado. Este módulo está actualmente terminado y se están realizando pruebas de usabilidad y accesibilidad sobre las interfaces creadas.

2. Sistema de diagnóstico automático de errores, basado en técnicas de minería de datos para detección y clasificación de errores, generación de informes y actividades recomendadas para cada caso. Sistema de autoaprendizaje con ayudas adaptadas al alumno basadas en la reflexión sobre los errores detectados. Software multimedia educativo para la valoración, el aprendizaje y el refuerzo de los contenidos matemáticos correspondientes al currículo de la Educación Infantil y del primer ciclo de la Educación Primaria, fundamentado en Programas de Educación Cognitiva para alumnado con NEE, y actividades de autonomía personal y habilidades sociales. El software multimedia está siendo implementado en Flash, conectado a la base de datos y otros módulos desarrollados (pizarra digital, interfaces basadas en visión, sistemas de autor de creación de actividades). Además, hemos desarrollado agentes pedagógicos virtuales, que funcionan con el sistema multimedia y que también puedan ser incorporados a otros módulos para facilitar la interacción con el usuario.

Para afrontar cada uno de los módulos identificados anteriormente, el equipo profesional del proyecto multidisciplinar de Divermates se organizó en pequeños campos de investigación especializados. Dichos campos se investigaron y desarrollaron de manera independiente para, finalmente, constituir un sistema único, integrado en un portal web. A continuación se describen los módulos principales desarrollados en este proyecto.

## **2. Sistema de interacción mediante interfaces accesibles**

Los alumnos con Síndrome de Down generalmente presentan problemas de motricidad fina, que constituye una dificultad añadida en la interacción con el sistema. El sistema que diseñamos registra cómo el alumno va colocando los números paso a paso y sus posiciones, el signo, las ayudas que utiliza, y finalmente el resultado, para poder detectar los errores y su causa. De esta forma, el teclado se presenta como un dispositivo de interacción muy complejo para este tipo de alumnos en la selección de números, y también el ratón en la ubicación. Por tanto, para proporcionar una interacción más adecuada a las necesidades planteadas, hemos diseñado una pizarra digital que presenta los números de 0 a 9, los signos, las ayudas y el formato del algoritmo de suma y resta. Esta pizarra permite escribir los números en las posiciones y un borrador si se equivoca y quiere eliminar los números escritos, similar a como lo realizaría en el papel. Esta pizarra será la principal interfaz de interacción que utilizará el alumno en la resolución de problemas y algoritmos de suma y de resta.



**Fig. 1.** Pizarra digital para la resolución de problemas y algoritmos.



**Fig. 2.** Sistema de diagnóstico inicial. Agente virtual Pomito.

La pizarra digital consta de seis elementos/zonas de interacción principales, que son: a) zona de enunciados, b) barra de números; c) agente virtual; d) hoja de resolución y e) caja de herramientas. En la base de datos se almacenan: la secuencia completa de interacción del alumno en la resolución de cada ejercicio, los tipos de problemas y algoritmos, la resolución correcta incluyendo los pasos y el resultado para cada ejercicio.

Para hacer la interfaz más accesible y facilitar la interacción, hemos seguido los siguientes criterios:

- **Tamaño de gráficos y letras:** Las letras de los enunciados se presentan de colores diferentes tanto para el planteamiento como para la pregunta del enunciado, los gráficos tienen un efecto de zoom para agrandar la imagen al deslizar el ratón o los dedos en la pantalla táctil y los números también tienen el efecto zoom al ser colocados en la hoja de resolución.
- **Organización y presentación:** La disposición de los elementos en los gráficos es muy importante para poder agruparlos y facilitar el conteo de elementos, para que de esta manera ayuden a reforzar la comprensión del enunciado.
- **Lenguaje:** Hemos utilizado un lenguaje familiar adecuado al nivel cognitivo del alumnado en los enunciados de los problemas diseñados y en los mensajes del sistema.
- **Interacción:** Para facilitar la interacción del alumno con la interfaz hemos realizado una adaptación del ratón para arrastrar y soltar, hemos utilizado una pantalla táctil normal y estamos diseñando un emulador de pantalla táctil basado en visión artificial.
- **Movimiento:** Para facilitar el movimiento de colocación de números en las áreas sensibles se ha realizado la adaptación de la interacción de arrastrar y soltar y agregado nuevas funcionalidades en los botones de números.

### 3. Sistema de diagnóstico automático de errores

Una vez realizados los registros mediante el sistema de interacción, debemos identificar los errores cometidos y categorizarlos. Para categorizar los errores, tomamos como dato de partida un conjunto de errores que el alumno puede cometer (tabla 1), subagrupados según sus similitudes. Asimismo, reservamos un último grupo/tipo de error, creado para reflejar todos aquellos ejercicios cuyo resultado no sea correcto y, además, no corresponda a ninguno de los errores anteriores.

<b>CATEGORÍAS Y TIPOS DE ERROR</b>	
1. Problemas grafomotrices y perceptivos	1.1 <i>COMÚN</i> : Confunden los números 3-5, 4-7, 6-9, 12-21... 1.2 <i>COMÚN</i> : Suman y restan alternativamente 1.3 <i>COMÚN</i> : Comienzan a operar por la izquierda
2. Errores de encolumnamiento y carencia de los órdenes de unidades	2.1 <i>COMÚN</i> : Colocación incorrecta de las unidades y decenas (dificultades de alineación, cambiar orden de unidades) 2.2 <i>COMÚN</i> : Suman/restan unidades de un orden con unidades de otro orden
3. Errores en la llevada	3.1 <i>COMÚN</i> : Se olvidan de llevar 3.2 <i>SUMA</i> : Escriben los resultados parciales intermedios incompletos 3.3 <i>SUMA</i> : Operan como si se tratase de dígitos independientes 3.4 <i>SUMA</i> : No escriben las unidades de la última columna 3.5 <i>SUMA</i> : Error al reagrupar 3.6 <i>RESTA</i> : Llevan siempre 3.7 <i>RESTA</i> : Restan siempre la cifra menor de la mayor.
4. Confundir el papel del cero en algoritmos con números que tienen un cero entre sus dígitos	4.1 <i>COMÚN</i> : Asocian el cero al resultado parcial 4.2 <i>COMÚN</i> : $N + 0 = 0$ $N - 0 = 0$ 4.3 <i>COMÚN</i> : Identifican el 0 con el 10 4.2 <i>RESTA</i> : Restan cero de la cifra correspondiente del sustraendo 4.3 <i>RESTA</i> : Cuando el cero está en el minuendo ponen en el resultado el valor de la unidad del sustraendo
5. Desconocimiento total del algoritmo	5.1 <i>SUMA</i> : Ignoran el valor posicional de las cifras y suman todos los números
6. Desconocimiento del significado de la operación	6.1 <i>COMÚN</i> : Restan cuando hay que sumar y viceversa
7. Hechos numéricos inventados	7.1 <i>COMÚN</i> : Fallan en determinados hechos numéricos
8. Otros	8.1 <i>COMÚN</i> : Abandonan

**Tabla 1.** Errores posibles en los algoritmos de suma y resta

Partimos de la resolución hecha por el alumno y los datos que corresponden a la resolución correcta del problema. Si se detecta que algunos de los campos no coinciden entre los resultados obtenidos y los esperados, bien porque contienen un valor distinto o porque solo en uno de los casos toma valor, se halla la ocurrencia de un error que habrá que pasar a analizarse.

A la hora de formular un método para determinar las incidencias que presenta un alumno en los diferentes errores, se ha optado por asignar a cada tipo un porcentaje de incidencia del error. Con este dato obtenemos un valor relativo al número de veces en que el alumno comete cada uno de los errores. El cálculo de estos porcentajes depende directamente del número de ejercicios que se estén evaluando en un instante dado, pues la incidencia de error se incrementa de forma constante ( $k$ ) con cada ocurrencia. Dicha constante debe adaptarse al caso de estudio, pues no es real que tome el mismo valor para baterías con un número diferente de problemas.

Por ello, para una batería de problemas resueltos de  $n$  ejercicios, y partiendo de la idea de que la ocurrencia de un mismo error en los  $n$  ejercicios significa una incidencia del 100%, el cálculo de la constante  $k$  responde a una sencilla regla de tres, resultando que  $k = 100/n$ .

Este proceso se aplica por separado para los ejercicios de suma y resta, obteniendo un porcentaje de incidencia para cada tipo de error individual. No obstante, tal y como se comentó anteriormente, ciertos errores forman parte de un mismo grupo de error, por

lo que, llegados a este punto, resulta interesante conocer una incidencia global asociada a los grupos de errores (clusters).

Estos nuevos porcentajes se obtienen aplicando una sencilla fórmula lineal, de la que obtendremos la media entre las incidencias de cada uno de los tipos de error que constituyen el cluster en análisis. Ahora mismo, las tablas de resultados obtenidas son cuatro: incidencias de tipo de error en el algoritmo de suma, incidencias de tipo de error en el algoritmo de resta, incidencia de grupos de error en el algoritmo de suma e incidencias de grupo de error en el algoritmo de resta, tal como se puede observar en la tabla 2.

<i>GRUPO ERROR SUMA</i>	<i>INCIDENCIA</i>	<i>INDICENCIA</i>	<i>GRUPO ERROR RESTA</i>
Percepción y grafomotriz	9	0	Percepción y grafomotriz
Encolumnamiento	0	0	Encolumnamiento
Reagrupación	17	0	Reagrupación
Confusión con el 0	0	0	Confusión con el 0
Omisión/Repetición	0	0	Desconocimiento algoritmo
Desconocimiento algoritmo	0	0	Desconocimiento operación
Desconocimiento operación	0	12	Otros
Otros	0		

**Tabla 2.** Incidencias por tipo de error para un alumno X.

Con la información obtenida del proceso de detección y análisis de errores, podemos generar un informe personalizado para cada alumno que sirva de orientación al profesorado, evitando el trabajo de analizar cada una de las resoluciones del alumno. El sistema ofrece el acceso, restringido para proteger el derecho a la privacidad de los alumnos, a un módulo donde se muestran informes con la problemática detectada y destacada sobre cada participante. Por motivos de seguridad sólo los profesores que actualmente tengan a su cargo a un alumno concreto podrán ver la información que tiene el sistema sobre el mismo.

La información se almacena en un fichero temporal con formato XML por alumno, en el que se define una clase para cada uno de los algoritmos que soporte el sistema. De este modo, la inclusión de nuevos algoritmos en el proceso de análisis no afectará al funcionamiento de este módulo.

Dentro de cada una de las clases la información se estructura jerárquicamente según categorías y tipos de error. La información de interés referente a las categorías se encuentra en dos campos: nombre identificativo y porcentaje de incidencia del mismo. Los tipos de error contienen la misma información que las categorías más una variable cualitativa auxiliar que indica el grado de incidencia tomando valor entre cuatro posibles: “BAJA”, “MEDIA”, “ALTA” y “MUY ALTA”. Cada uno de estos valores corresponde a uno de los rangos establecidos de forma proporcional a partir de un umbral mínimo. El valor de este umbral depende del número de ejercicios analizados y su utilidad reside en discriminar aquellos errores que son frutos de despistes ocasionales por parte del alumno y que no requieren un tratamiento especial; es decir, todos aquellos errores cuya incidencia se encuentre por debajo de ese límite establecido serán considerados como errores que no requieren un refuerzo y, por tanto, pueden obviarse. Para hacer más comprensible la interpretación de la información obtenida, a cada categoría de error identificada en el informe le

acompaña una gráfica estadística donde se reflejan los porcentajes de incidencia ponderados. A partir de este informe, que el profesor podrá obtener cada vez que considere oportuno, se podrá aplicar una técnica específica que aporte una ayuda concreta a los problemas del alumno.

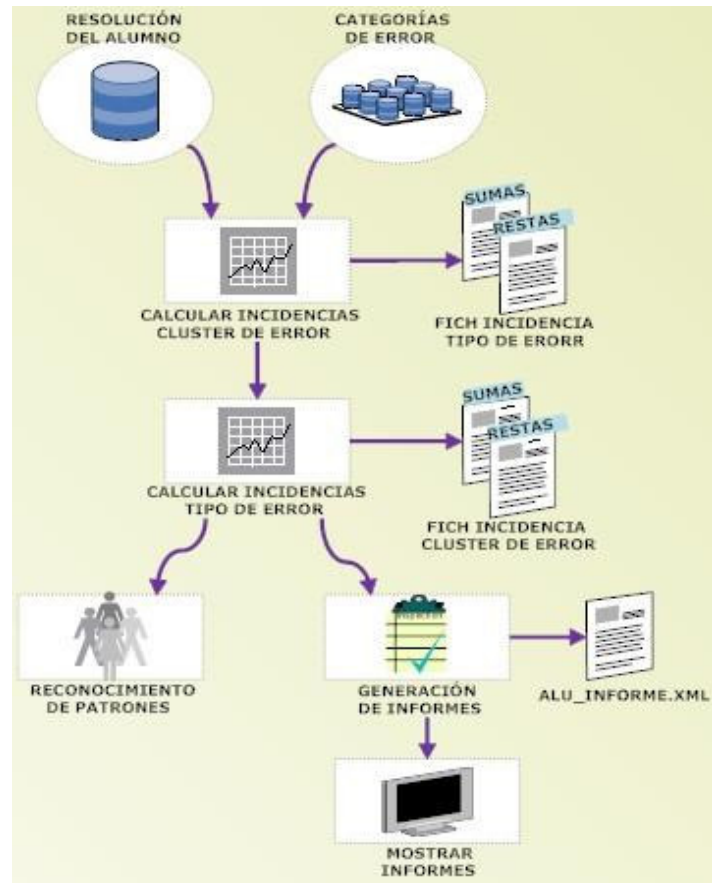


Fig. 4. Flujo del sistema global de análisis

#### 4. Sistema de autoaprendizaje

Una vez programado y comprobado el correcto funcionamiento del módulo de detección de errores, se planteó la posibilidad de utilizar esta información como datos fuente para el proceso de enseñanza de los alumnos. Como se comentó anteriormente, la salida de la detección se ofrece al profesorado para personalizar el aprendizaje; no obstante, se abría la perspectiva de un nuevo reto: realimentar el sistema con dicha información para poder crear un módulo que permitiera a los alumnos la práctica de los algoritmos y el auto-aprendizaje de los mismos.

Es precisamente en el marco de las técnicas de auto-aprendizaje en el que surge el módulo de “ayudas personalizadas” o “sistema de autoaprendizaje” de este proyecto, cuyo principal objetivo es incentivar al alumno a aprender de sus propios errores. Esto tendrá lugar gracias una lista de mensajes que se irán mostrando en función de las resoluciones que realice el alumno. Estos mensajes, orientados al tipo de error acontecido, y relacionados con cada uno de los errores, se muestran en la siguiente tabla:

<b>ERROR</b>		<b>AYUDA / PISTA</b>
<i>PROBLEMAS GRAFOMOTRICES Y PERCEPTIVOS</i>		
1	Confunden los números 3 y 5, 6 y 9, 4 y 7, 12 y 21...	<b>Revisa los números que has colocado.</b>
2	Comienzan a operar por la izquierda.	<b>Es mejor que comiences a efectuar la operación por la columna de las unidades y sigas por la columna de las decenas.</b>
3	Suman y restan alternativamente.	<b>Fíjate en la operación que has realizado. ¿Es una suma o una resta?</b>
<i>ERRORES DE ENCOLUMNAMIENTO Y CARENCIA DE CONOCIMIENTO DE LOS ÓRDENES DE UNIDADES</i>		
4	Colocación incorrecta: dificultades de alineación o cambio de órdenes de las unidades	<b>Observa cómo colocaste las unidades y las decenas. Escribe las unidades en la columna de las unidades y las decenas en la columna de las decenas.</b>
5	Suman/restan unidades de un determinado orden con unidades de distintos órdenes del otro operando.	<b>Observa si estás sumando (o restando) las decenas con las unidades.</b>
<i>ERRORES EN LA LLEVADA</i>		
6	Escriben los resultados parciales intermedios completos.  Operan como si se tratase de dígitos independientes.	<b>Es una suma con llevadas. Revisa la columna de las decenas.</b>
7	Se olvidan de llevar.	<b>¿Te has olvidado la llevada?</b>
8	No escriben las decenas en la última columna.	<b>Corrige el resultado. Faltan las decenas.</b>
9	Error al reagrupar.	<b>Es una suma con llevadas. Revisa las unidades y la cifra de la llevada.</b>
10	Llevan siempre.	<b>Revisa la operación. No es una suma (o una resta) con llevadas.</b>
11	Restan siempre la cifra menor de la mayor, con independencia de que esté en el	<b>Revisa la operación. Recuerda que al minuendo se le resta el sustraendo.</b>

	minuendo.	
<i>CONFUNDIR EL PAPEL DEL CERO</i>		
12	$N + 0 = 0, N - 0 = 0, 0 - N = 0$	<b>Fíjate en las columnas de las unidades. En este caso la suma (o la resta) de las unidades no puede dar cero.</b>
13	Ponen cero en lugar de restar.	<b>Es una resta con llevadas. En este caso, el resultado de las unidades no puede ser cero.</b>
14	Restan cero de la cifra correspondiente del sustraendo. Ponen las unidades del sustraendo en lugar de restar.	<b>Fíjate bien. No has efectuado la resta de las unidades.</b>
15	Identifican el 0 con el 10, lo que conduce a aumentar en una unidad el valor del orden inmediatamente superior.	<b>Revisa la operación. No es una suma (o una resta) con llevadas.</b>
<i>DESCONOCIMIENTO TOTAL DEL ALGORITMO</i>		
16	Ignoran el valor posicional de las cifras y suman todos los números.	<b>No olvides que debes sumar las unidades y luego sumar las decenas.</b>
<i>DESCONOCIMIENTO DEL SIGNIFICADO DE LA OPERACIÓN</i>		
17	Restan cuando hay que sumar y viceversa.	<b>Vuelve a intentarlo. ¿Es una suma o una resta?</b>
<i>HECHOS NUMÉRICOS INVENTADOS</i>		
18	Fallan en determinados hechos numéricos.	<b>Vuelve a intentarlo. Revisa el resultado de la operación.</b>
<i>OTROS</i>		
19	Abandonan.	<b>¿Has terminado la operación? Observa la columna de las decenas.</b>

**Table 3.** Ayudas adaptadas al tipo de error

## 5. Portal en Divermates

Todos los recursos creados como la información sobre el proyecto pueden ser accedidos desde Internet, a través de un portal web (<http://www.divermates.uil.es>). El Portal Web posee distintas opciones según los objetivos que se persiguen (Figura 5).





Fig. 5. Pantalla inicial del Portal Web de Divermates

El conjunto de opciones se han agrupado en 6 bloques principales pensando en los usuarios del Portal y en como trabajan los sistemas desarrollados.

**-Bloque 1: Sistemas de Divermates para trabajo del alumnado y el profesorado**

- 1- Juega con Divermates: incluye el sistema de diagnóstico completo, destinado a los centros. El sistema deberá ser corrido vía Internet. Intenta recopilar toda la información de los alumnos para estudiar los patrones de error en población diversa.
- 2- Practica tus Mates: incluye el sistema de detección de errores con ayudas y pistas, puede ser ejecutado sin estar conectado a Internet. Está pensado para el autoaprendizaje y para el refuerzo.
- 3- Otras Mate Herramientas: Otros sistemas que se han diseñado en este proyecto (como los agentes pedagógicos) que se ponen a disposición de la comunidad para la descarga. Igualmente, se ponen otras herramientas diseñadas por nuestro equipo como un tutorial inteligente para el refuerzo de la suma.

**-Bloque 2: Información relevante del Proyecto para investigadores y usuarios en general.**

- 1- Módulos de Investigación: Información sobre el trabajo realizado en cada uno de los módulos de investigación en los que se ha subdividido el proyecto.
- 2- Información sobre el proyecto: Resumen del proyecto, informe final, publicaciones.

- 3- Enlaces de interés: otros enlaces a entidades que colaboran con el equipo de investigación y recursos externos.

## 6. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado algunos de los recursos desarrollados dentro de un proyecto multidisciplinar, que queremos brindar a toda la comunidad educativa, y en especial a las personas relacionadas con la atención a la diversidad y al mundo de las matemáticas. Entre otras posibilidades que ofrece este sistema se encuentran la capacidad de detectar automáticamente los errores cometidos por los alumnos en las operaciones aritméticas de suma y de resta, determinar las posibles causas y un sistema capaz de proponer ayudas adaptadas a los errores detectados en cada caso. Hemos realizado una primera experiencia piloto con un grupo de alumnos síndrome de Down de la ATT21 seleccionados por niveles educacionales, con el fin de validar las interfaces de interacción y los algoritmos y de los resultados hallados hemos ya incorporado modificaciones al sistema, tanto en el registro de la interacción como en las categorías de error.

Actualmente, continuamos trabajando sobre el análisis de errores y detección de patrones en la resolución de problemas. Asimismo, se está desarrollando un sistema multimedia de enseñanza aprendizaje de conceptos matemáticos, habilidades sociales y autonomía personal, el cual estará conectado al módulo de diagnóstico de errores, lo cual permitirá utilizar esta herramienta de detección automática de errores no solo en la fase de evaluación, sino todo el proceso de enseñanza aprendizaje. Por otro lado, estamos incluyendo en el sistema juegos matemáticos relacionados con la suma y la resta, que pueden trabajar de modo independiente al sistema.

## Bibliografía

1. Buckley, S.; Sacks, B. (1987). The adolescent with Down's Syndrome. Portsmouth: Portsmouth Polytechnic (citado en. Monari, E. 2002, Learning mathematics at school...and later on. *The Down Syndrome Educational Trust*. <http://www.down-syndrome.net/library/periodicals/dsnu/02/01>).
2. Fernández, F.; Llopis, A.; Pablo, C. (1991). *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación*. Santillana. Aula XXI. Madrid.
3. Juan, A.; Vidal, E.(1994) Fast K-means-like clustering in metric spaces *Pattern Recognition Letters*, 15:1, 19-25, Enero.
4. Mico, L.; Oncina, J.;Vidal, E. (1994). A new version of the nearest-neighbour approximating and eliminating search algorithm (AESAs) with linear preprocessing-time and memory requirements.
5. Roa, R. (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Síntesis. Madrid.