

# Statistische 3D Formmodellierung mittels quasi-verzerrungsfreier sphärischer Parametrisierung

Sebastian T. Gollmer, Thorsten M. Buzug

Institut für Medizintechnik, Universität zu Lübeck  
gollmer@imt.uni-luebeck.de

**Kurzfassung.** In diesem Beitrag wird die Integration einer etablierten Methode für die Parametrisierung geschlossener Oberflächen mit minimaler Verzerrung in einen effizienten Algorithmus für die Erstellung statistischer Formmodelle (SFM) vorgestellt. Dieser bestimmt die erforderlichen Punkt-Korrespondenzen (Landmarken) durch Minimierung der sog. Description Length des SFM. Da diese Optimierung in einer Parameterdomäne erfolgt, ist zunächst eine entsprechende Initialisierung in Form von parametrisierten Formrepräsentationen erforderlich. Unvermeidbare geometrische Verzerrungen in der Parameterdomäne müssen möglichst gering sein, da das resultierende SFM die eigentliche Objektform sonst nur unzureichend repräsentiert. Während vorherige Arbeiten eine Maximierung der Flächentreue der initialen Parametrisierungen oder eine geeignete Umverteilung der Landmarken vornehmen, erlaubt das von uns vorgestellte Verfahren die Minimierung der Flächenverzerrung unter gleichzeitig bestmöglicher Erhaltung der Winkelverhältnisse.

## 1 Einleitung

Statistische Formmodelle (SFM) [1] integrieren die zu erwartende Formvariabilität eines bestimmten Objekts auf der Basis einer repräsentativen Trainingspopulation. Die elastische Adaption des Modells an patientenspezifische Formausprägungen erfolgt somit a priori innerhalb plausibler Grenzen. Bei der Erstellung des SFM stellt die Identifikation von Punkt-Korrespondenzen (Landmarken) über alle Instanzen der Trainingspopulation die wesentliche Herausforderung dar. Für 3D-Modelle sind ausschließlich automatisierte Verfahren praktikabel. Eine Möglichkeit hierzu bietet die Definition inhärenter Korrespondenzen durch geeignete Parametrisierung der Forminstanzen, wobei sich für zur 2-Sphäre  $\Omega^3$  homeomorphe Objekte, sphärische Harmonische (SPHARM-Modell [2]) besonderes eignen.

Am erfolgreichsten lässt sich die Korrespondenzfindung als Optimierungsproblem formulieren, mit dem Ziel, diejenigen Korrespondenzen zu finden, welche das „beste“ SFM im Sinne eines bestimmten Gütekriteriums repräsentieren. Als Goldstandard für die Zielfunktion hat sich die Minimierung der sog. *Description Length* (DL) des Modells [3] etabliert und wurde im Hinblick auf Effizienz weiterentwickelt [4]. In der Praxis lässt sich die Optimierung nur in einer geeigneten Parameterdomäne lösen, weshalb zunächst die initiale Parametrisierung der

Trainingsinstanzen erforderlich ist. Dabei auftretende unvermeidbare Verzerrungen in der Parameterdomäne müssen möglichst gering sein, da das resultierende SFM die eigentliche Objektform sonst nur unzureichend repräsentiert. Aus diesem Grund minimieren Davies et al. [5] die Flächenverzerrung über alle Parametrisierungen der Trainingspopulation. Um dagegen die ausgeprägten Flächenverzerrungen der in [4] verwendeten konformen Parametrisierung zu kompensieren, schlagen Heimann et al. [6] eine geeignete Umverteilung der Landmarken (Remeshing) während und bzw. oder nach der Optimierung vor.

Der wesentliche Beitrag der vorliegenden Arbeit ist die Implementierung einer effizienten Korrespondenzfindung [4, 6] unter Verwendung des kompletten Parametrisierungsverfahren nach [2], während in [3, 5] lediglich die Initialisierung aus [2] verwendet wird. Wir erhalten dadurch Parametrisierungen mit minimaler Flächenverzerrung und bestmöglicher Winkeltreue. Ein Remeshing wie in [6] wird damit obsolet und die dabei induzierte, potenziell negative Beeinflussung der Optimierung vermieden.

## 2 Material und Methoden

### 2.1 Statistische Formmodelle

Die Formen  $S_i \subset \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, n_s$  der Trainingspopulation lassen sich jeweils durch  $n_p$  korrespondierende Landmarken repräsentieren und somit mit dem Vektor  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{dn_p}$  beschreiben. Die Formvariabilität ergibt sich aus der räumlichen Variation der Landmarken über alle Formen  $\{S_i\}$ . Dazu werden die Durchschnittsform  $\bar{\mathbf{x}}$  sowie, mittels Singulärwertzerlegung, die  $n_m$  Eigenvektoren  $\{\mathbf{p}_m\}$  und -werte  $\{\lambda_m\}$  der Landmarkenvariation berechnet.  $\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{m=1}^{n_m} \mathbf{p}_m b_m^*$  ist damit eine beliebige valide Forminstanz mit den Formparametern  $\{b_m^* \in \mathbb{R}\}$ .

### 2.2 Initialisierung und Optimierung der Punkt-Korrespondenzen

Initiale Korrespondenzen lassen sich durch äquidistante Verteilung der  $n_p$  Landmarken in einer geeigneten Parameterdomäne  $\Omega$  (hier:  $\Omega^3$ ) und die Repräsentation der Forminstanzen  $\{S_i\}$  durch die entsprechenden Parametrisierungsfunktionen  $\{\omega_i\}$  bestimmen (Abb. 1). In 3D ist die Form  $S_i$  eine Oberfläche, die bijektive Abbildung  $f : \Omega^3 \rightarrow S_i$  bezeichnet eine Oberflächenparametrisierung und  $\Omega_i$  die Oberfläche in  $\Omega^3$ . Mit den Parameterkoordinaten  $\theta \in [0, \pi]$  und  $\phi \in [0, 2\pi]$  folgt  $\Omega^3 \ni (\theta, \phi) \rightarrow \omega_i(\theta, \phi) = \rho \in S_i$ .

Formal führt die inverse Abbildung  $f^{-1} : S_i \rightarrow \Omega^3$  zur gesuchten initialen Oberfläche  $\Omega_i$ , wobei sich die Polygonflächen und -winkel nicht gleichzeitig vollständig erhalten lassen. In [4, 6] wird die winkeltreue (konforme) Abbildung  $f_K$  von Gu et al. [7] verwendet, welche hier durch die verzerrungsminimierende Abbildung  $f_A$  nach Brechbühler et al. [2] ersetzt wird. Initiale Werte für  $\theta$  und  $\phi$  ergeben sich durch Lösen der Laplace'schen Gleichungen  $\nabla\theta = 0$  und  $\nabla\phi = 0$ . Die jeweiligen Dirichlet-Randbedingungen sind zum einen  $\theta_{\text{Nordpol}} = 0$  und  $\theta_{\text{Südpol}} = \pi$  (Zuweisung zum Vertex mit min./max.  $z$ -Koordinate) sowie die

Periodizität von  $2\pi$  und die Fixierung eines einzelnen Vertex. Anschließend wird die Flächenverzerrung mit Hilfe des Newton-Verfahrens unter Berücksichtigung von drei Nebenbedingungen minimiert: Erhaltung von Vektorlängen, Polygonflächen und Polygonwinkel. Die Oberfläche  $\Omega_1$  der ersten Forminstanz in Abb. 1(b) zeigen Abb. 1(c) für  $f_K$  und Abb. 1(d) für  $f_A$ . Gleiche Farben stellen Korrespondenzen zwischen  $S_1$  und  $\Omega_1$  dar.

Die Re-Positionierung der Landmarken erfolgt im Sinne der Minimierung von

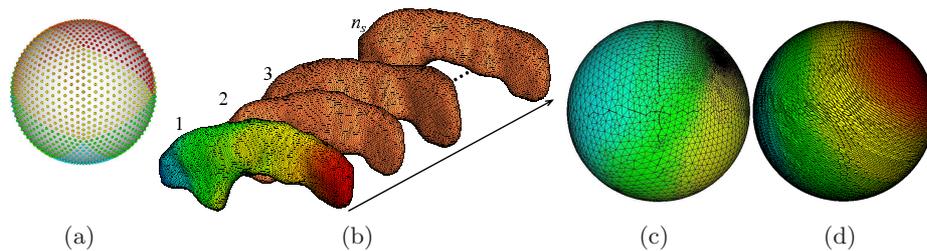
$$F = \sum_m \mathcal{L}_m, \text{ mit } \mathcal{L}_m = \begin{cases} 1 + \log(\lambda_m/\lambda_{\text{cut}}) & \text{für } \lambda_m \geq \lambda_{\text{cut}} \\ \lambda_m/\lambda_{\text{cut}} & \text{für } \lambda_m < \lambda_{\text{cut}} \end{cases} \quad (1)$$

wobei  $\lambda_{\text{cut}}$  in Abhängigkeit von der Rauschbehaftung der Trainingspopulation zu wählen ist [4] (hier:  $\lambda_{\text{cut}} = (0.3/\bar{r})^2$ , mittlerer Radius der  $\{S_i\}$ :  $\bar{r} = 50$  Voxel). (1) ist eine Approximation der DL des SFM mit dem Vorteil einer semi-analytisch bestimmbaren Ableitung. Die Ableitung der Re-Parametrisierung  $\Phi_i(\theta, \phi)$  und somit die Gradientenrichtung auf  $\Omega_i$  wird mittels finiter Differenz unter Verwendung eines lokalen Re-Parametrisierungsverfahrens [4] bestimmt.

### 2.3 Evaluierung der Modellgüte

Wir quantifizieren den Einfluss der initialen Parametrisierung auf die Modellgüte durch Vergleich von jeweils zwei, unter Verwendung von  $f_K$  und  $f_A$  erstellten SFM der Hippocampus-Region des menschlichen Gehirns. Dabei kommen die bekannten Gütekriterien Spezifität  $\mathcal{S}$  und Generalisierungsfähigkeit  $\mathcal{G}$  zum Einsatz. Bei einem spezifischen SFM weisen  $N$  (hier:  $N = 1000$ ) unter zufälliger Variation von  $\{b_m^*\}$  erstellte Rekonstruktionen  $S^*$  eine große Ähnlichkeit mit den Trainingsinstanzen  $\{S_i\}$  auf. Die Fähigkeit zur Abbildung unbekannter Forminstanzen wird mittels Leave-one-out Tests bewertet und als  $\mathcal{G}$  bezeichnet.

Generell hängen  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{G}$  von der Anzahl  $n_m$  der berücksichtigten Parameter  $\{b_m^*\}$  ab. Für die Bestimmung der Ähnlichkeit von  $S^*$  zu den  $\{S_i\}$  sind verschiedene Distanzmaße verwendbar. Ein anerkannter und effizienter Ansatz ist die Berechnung des mittleren absoluten Abstands der Korrespondenzen. Die Formähnlichkeit des Modells mit der Trainingspopulation und damit der Objektklasse



**Abb. 1.** Initialisierung der Punktkorrespondenzen: Verteilung der äquidistanten Landmarken (a) über die Forminstanzen (b) unter Verwendung der Parametrisierungen  $\{\omega_i\}$ . (c) und (d) zeigen  $\Omega_1$  unter Verwendung von  $f_K$  bzw.  $f_A$ .

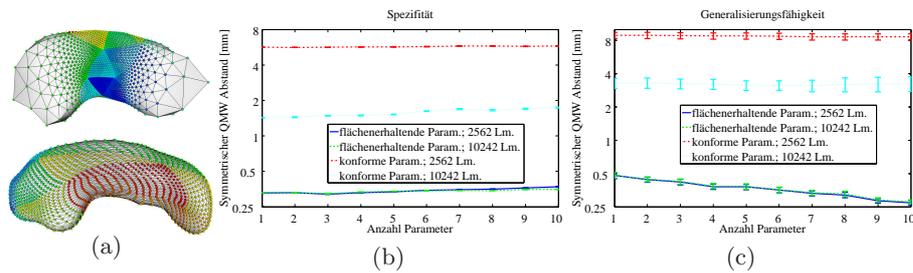
bleibt dabei jedoch unberücksichtigt. Somit ist die Quantifizierung unzureichender Formrepräsentationen, z.B. infolge parametrisierungsbedingter Verzerrungen, auf diese Weise nicht möglich. Aus diesem Grund verwenden Heimann et al. [6] die Jaccard-Metrik, während wir die Oberflächen der Forminstanzen unter Verwendung des symmetrischen quadratischen Abstandes vergleichen.

### 3 Ergebnisse

Qualitative und quantitative Ergebnisse sind in Abb. 2 dargestellt. In Abb. 2(a) sind zwei Hippocampus-Modelle ( $n_s = 21, n_p = 2562$ ) unter cranialer Ansicht zu sehen, die unter Verwendung von  $f_K$  (oben) und  $f_A$  (unten) erstellt wurden. Die Landmarken-Verteilungen  $\bar{x}$  sind den dadurch repräsentierten Formen  $\bar{S}$  jeweils überlagert. Die quantitative Auswertung von  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{G}$  dieser, sowie von zwei weiteren Modellen mit  $n_p = 10242$ , zeigen Abb. 2(b, c). Abgebildet sind  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{G}$  für Rekonstruktionen  $S^*$  unter Berücksichtigung von bis zu zehn Hauptmoden, was für alle Modelle einer Gesamtvarianz von  $\geq 90\%$  entspricht.

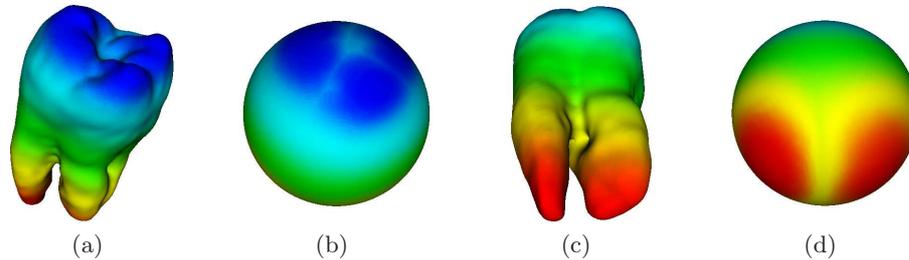
### 4 Diskussion

Aus den Ergebnissen in Abb. 2 ist die starke Abhängigkeit der Modellgüte von der initialen Parametrisierung unmittelbar ersichtlich. Bereits bei Betrachtung der exemplarisch für die Form  $S_1$  dargestellten, mittels  $f_K$  bzw.  $f_A$  erstellten Parametrisierungen  $\omega_1$  in Abb. 1(c, d) liegt die Vermutung nahe, dass die unter  $f_K$  insbesondere an den Regionen von  $S_1$  mit der größten Krümmung auftretenden, ausgeprägten Flächenverzerrungen zu einer entsprechend defizitären Repräsentation dieser Regionen durch die Landmarken führt. Dementsprechend stellt die klar erkennbare schlechte Güte des Modells in Abb. 2(a) (oben), sowie Fehler von mehreren mm bei der Auswertung von  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{G}$  (Abb. 2(b, c)) eine logische Konsequenz dar. Die exzessive Abtastung von  $\Omega^3$  mit  $n_p = 10242$  Landmarken scheint intuitiv eine Möglichkeit darzustellen, der Unterrepräsentation bestimmter Regionen des Objektes entgegenzuwirken. Gemäß Abb. 2(b, c) ist auf diese Weise eine Reduzierung der Fehler für  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{G}$  um einen Faktor von ca. 4



**Abb. 2.** Landmarken-Repräsentationen  $\bar{x}$  (a) bei Initialisierung mit  $f_K$  (oben) und  $f_A$  (unten) sowie zugehörige Gütekriterien  $\mathcal{S}$  (b) und  $\mathcal{G}$  (c).

**Abb. 3.** Parametrisierung der komplexen Anatomie eines Backenzahns (The Volume Library, <http://www9.informatik.uni-erlangen.de/External/vollib/>) mittels  $f_A$ .



bzw. 2,5 gegenüber dem SFM mit  $n_p = 2562$  möglich. Der Unterschied zu den basierend auf  $f_A$  erstellten SFM liegt jedoch weiterhin im Bereich einer Größenordnung, so dass die Vergrößerung der Anzahl der Landmarken keine adäquate Kompensationsmethode darstellt.

Die Ergebnisse zeigen, dass wir unter Verwendung von  $f_A$  in der Lage sind, optimale, die Objektklasse valide repräsentierende SFM unter Verwendung eines effizienten Algorithmus zu erstellen. Die Entbehrlichkeit eines *Remeshing* während der Optimierung stellt nicht nur eben diese Effizienz sicher, sondern vermeidet auch eine Verringerung der Stabilität der Konvergenz zum globalen Minimum. Wir wollen die vorgestellte, erfolgreiche Kombination ebenfalls für die Erstellung von SFM für Anatomien mit komplexer Geometrie verwenden. Die Plausibilität der Parametrisierung des Backenzahns in Abb. 3(a, c) weist darauf hin, dass  $f_A$  hierzu das nötige Potenzial liefert (Abb. 3(b, d)).

**Danksagung.** Wir danken M. Styner und Mitarbeitern, UNC Neuro Image Laboratories, für die zur Verfügung Stellung der Hippocampus-Daten.

## Literaturverzeichnis

1. Cootes TF, Taylor CJ, Cooper DH, et al. Active shape models: their training and application. *Comput Vis Image Underst.* 1995;61(1):38–59.
2. Brechbühler C, Gerig G, Kübler O. Parametrization of closed surfaces for 3-D shape description. *Comput Vis Image Underst.* 1995;61(2):154–70.
3. Davies RH, Twining CJ, Cootes TF, et al. 3D statistical shape models using direct optimisation of description length. In: *Proc ECCV*; 2002. p. 1–17.
4. Heimann T, Wolf I, Williams T, et al. 3D active shape models using gradient descent optimization of description length. In: *Proc IPMI*; 2005. p. 566–77.
5. Davies RH, Twining CJ, Taylor CJ. Consistent spherical parameterisation for statistical shape modelling. In: *Proc ISBI*; 2006. p. 1388–91.
6. Heimann T, Wolf I, Meinzer HP. Automatic generation of 3D statistical shape models with optimal landmark distributions. *Methods Inf Med.* 2007;46(3):275–81.
7. Gu X, Wang Y, Chan TF, et al. Genus zero surface conformal mapping and its application to brain surface mapping. *IEEE Trans Med Imaging.* 2004;23(8):949–58.