# Представления групп лиева типа

И.З. Голубчик[1] А.И. Мурсеева[2]
mgolubchik@mail.ru mAlsou@mail.ru

1 – БГПУ имени Акмуллы (Уфа) 2 – Уфимский политехнический колледж (Уфа)

**Аннотация**

В работе введено понятие почти лиевых групп, обобщающих группы Шевалле, группы лиева типа, и изучены гомоморфизмы этих групп в группы обратимых элементов $PI$ — кольца.

## 1 Введение

Начнем мы с разных способов задания групп Ли и их изоморфизмов в бесконечномерном случае.

1. $G = GL_n(R)$, $E = E_n(R)$ изоморфизмы для $\frac{1}{2} \in R$, $n \geqslant 3$ описаны И.З. Голубчиком и А.В. Михалевым [5, 6] и независимо Е.И. Зельмановым [7]. В их работах были получены также и унитарные аналоги.

2. $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ — ортогональная система идемпотентов в $R$, $e_i^* = e_{i+3}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $*$ — инволюция в $R$.

$\sum\limits_i e_i = 1$ и $Re_iR = R$, $G = U(R, *) = \{A \in R | A \times A^* = A^* \times A = E\}$. $E$ порождено $1 + e_i r e_i - (e_i r e_i)^*$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 6$.

Здесь изоморфизм описан Альбиной Исмагиловой [2]. Она использовала как методы из статей И.З. Голубчика, А.В. Михалева, так и метод из работ Е.И. Зельманова.

3. $K$ — конечное подмножество в $Q^n$, $0 \in K$, $g = \oplus_{\alpha \in K} g_\alpha$ — конечно-градуированная алгебра над полем нулевой характеристики $[g_\alpha, g_\beta] \subseteq g_{\alpha+\beta}$ и $g_j = \{0\}$ при $j \notin K$. Кроме того, $g_0 \subseteq \sum\limits_{\alpha \in K} [g_\alpha, g_{-\alpha}]$, $g_\alpha \subseteq \sum\limits_{j \in K} [g_{\alpha-j}, g_j]$, где $\alpha, j$ линейно независимы и $E(g)$ – подгруппа, порождаемая $\beta^{adx_\alpha}$, $x_\alpha \in g_\alpha$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \in Q$, $\beta$ – рациональное число. Эпиморфизмы $E(g) \to E(g_1)$ описаны И.З. Голубчиком [8] в случае, когда $g_1$ – подпрямое произведение специальных алгебр Ли.

Отметим, что $E(g)$ обобщает группы Шевалле над коммутативным кольцом. В этом случае $g_\alpha$ — корневое подпространство.

## 2 Почти лиевы группы

Приведем еще один класс групп, связанных с алгебрами Ли, не обязательно конечно-градуированными, как это было в пунктах 1-3.

Определение. Пусть $Q$ – поле рациональных чисел.

$$sl_2(Q) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} | a, b, c \in Q\} \tag{1}$$

– трехмерная простая алгебра Ли над полем рациональных чисел. $R$ – ассоциативная алгебра с 1 над полем рациональных чисел.



In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at http://ceur-ws.org

Задан набор гомоморфизмов $\varphi_i : sl_2(Q) \to R^-$ алгебр Ли.

Набор гомоморфизмов $\varphi_i$, конечный либо бесконечный. При этом для каждого $i$ образ $\varphi_i$ порождает конечномерную ассоциативную алгебру над полем рациональных чисел в $R$. Легко показать, что $\varphi_i\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}$ и $\varphi_i\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}$ – нильпотентные элементы ассоциативной алгебры $R$. Почти лиевой группой $E$, порожденной набором $\varphi_i$, назовем подгруппу в группе обратимых элементов кольца $R$, порожденную $e^{\alpha\varphi_i\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}}$, $e^{\alpha\varphi_i\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}}$, где $\alpha$ – рациональное число (экспонента обрывается, так как элементы $\varphi_i\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}$ и $\varphi_i\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}$ нильпотентны). Через $g$ обозначим подалгебру Ли в алгебре $R^-$, порожденную $\varphi_i\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}$, $\varphi_i\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}$ для всех $i$. Нам понадобится ряд определений.

Пусть $R(\lambda)$ — кольцо многочленов над $R$ от переменной $\lambda$. Определим группу $E(g[\lambda])$ как подгруппу в группе обратимых элементов кольца $R(\lambda)$, порожденную набором элементов $e^{\alpha(\lambda)\varphi_i\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}}$, $e^{\alpha(\lambda)\varphi_i\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}}$, где $\alpha(\lambda)$ – полиномы с рациональными коэфициентами. Далее, $E_\lambda$ – нормальный делитель в группе $E(g[\lambda])$, порожденный элементами $e^{\lambda\alpha_\lambda\varphi_i\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}}$, $e^{\lambda\alpha_\lambda\varphi_i\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}}$, а $E_{\lambda^2}$ – нормальный делитель в $E(g[\lambda])$, порожденный коммутантом $E_\lambda$ и элементами $e^{\lambda^2\alpha(\lambda)\varphi_i\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}}$, $e^{\lambda^2\alpha(\lambda)\varphi_i\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}}$, где по-прежнему $\alpha(\lambda)$ – полиномы от $\lambda$ с рациональными коэфициентами. Наконец,

$$C_{\lambda^2} = \{A \in E(g[\lambda]) | A - 1 \in \lambda^2 R[\lambda]\}. \tag{2}$$

Нам понадобится следующее коммутаторное условие:

$$[E, C_{\lambda^2}] \subseteq E_{\lambda^2}. \tag{3}$$

Коммутаторные формулы в линейных и унитарных групп над кольцами, а также в группах лиевского типа, обобщающие условие (3), исследовались в работах ряда авторов. Они выполнены для широкого класса групп.

Основные предложения следующие:

Пусть $E$ – почти лиева группа и $Q : E \to U(S)$ – гомоморфизм групп, $S - PI$ алгебра (ассоциативная алгебра с полимиальным тождеством) над полем рациональных чисел, причем $S$ порождается как кольцо $ImQ$.

Предложение 1. $Q(e^{\alpha\varphi_i}(F)) = e^{\alpha x_i}$ и $x_i$ – нильпотентный элемент кольца $S$, где $F = \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}$.

Предложение 2. Пусть справедлива формула (3). Тогда существует гомоморфизм $\tau$ алгебры $g$ из $R$, $i \in I$ в Inder $S$ (алгебру Ли внутренних дифференцирований кольца $S$) $(r(s) = rs - sr)$ такой, что

$$\tau(\varphi_i(F)) = x_i, \quad \tau(A\alpha A^{-1}) = Q(A)\tau(\alpha)Q(A^{-1}), \tag{4}$$

где $a \in g, A \in E$.

Предложение 3. Справедливы включения

$$[E, C(\operatorname{Ker}\tau)] \subseteq \operatorname{Ker} Q \subseteq C(\operatorname{Ker}\tau),$$

где $C(\operatorname{Ker}\tau) = \{A \in E| \ \forall a \in g)[AaA^{-1} - a \in \operatorname{Ker}\tau]\}$ – верхняя конгруэнц подгруппа уровня $\operatorname{Ker}\tau$.

Коммутант $[E, C(\operatorname{Ker}\tau)]$ – это нижняя конгруэнц подгруппа уровня $\operatorname{Ker}\tau$.

Докажем сначала предложение 1 в случае, когда $S$ – первичная $PI$-алгебра над полем рациональнах чисел.

Доказательство: Легко показать, что конечно-порожденное подкольцо в $S$ в этом случае вкладывается в кольцо матриц над полем комплексных чисел $C_m$, $m \leqslant pi.degS$ ($pi$ – степень кольца $S$). Гомоморфизм $\varphi_i$

задает конечномерное представление $\overline{\varphi_i}$ специальной линейной группы $Sl_2(Q)$. Подкольцо $S$ порождается элементами $\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}$ и $\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Через $H$ обозначим подгруппу в $U(S)$, порожденную этими же элементами. Эта группа $H$ разрешима. По теореме Колчина–Мальцева, эту подгруппу можно сопрячь матрицей $T$ так, что полученная погруппа почти триангулируема и существует $k \leqslant f(pi.degS)$, для которой $T\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}^k T^{-1}$ и $T\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}1\beta\\ 01\end{pmatrix}^k T^{-1}$ будут треугольными матрицами.

Далее, $\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}^k=\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}\alpha^k & 1\\ 0 & \alpha^{-k}\end{pmatrix}$ и $\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}1 & \beta\cdot k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}1\beta\\ 01\end{pmatrix}^k$.

Посчитаем коммутанты этих матриц: $\begin{pmatrix}\alpha^k & 1\\ 0 & \alpha^{-k}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & \beta\cdot k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha^{-k} & 0\\ 0 & \alpha^{k}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & \beta\cdot k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}\alpha^k & \alpha^k\cdot\beta\cdot k\\ 0 & \alpha^{-k}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha^{-k} & \alpha^{-k}\cdot(-\beta\cdot k)\\ 0 & \alpha^{k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (\beta\cdot k)(-1+\alpha^{2k})\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Тогда $T(\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}1 & \beta\cdot(-1+\alpha^{2k})\\ 0 & 1\end{pmatrix})T^{-1}$ является коммутантом двух треугольных матриц, т.е. верхней треугольной матрицей. Но верхнетреугольная матрица унипотентна. Сопрягая $T^{-1}$, получаем, что $\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}1 & \beta\cdot(-1+\alpha^{2k})\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – унипотентный элемент для $\forall\alpha$, $\beta$, если $k$ фиксировано.

Подбирая $\beta$ и $\alpha$, получаем, что элемент $\tau(\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}1\gamma\\ 01\end{pmatrix})$ – унипотентный и элементы $\tau(\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}1\gamma\\ 01\end{pmatrix})-1$ в некоторой фиксированной степени, зависящей от $pi.deg$ кольца $S$, равны 0. Тем самым в случае первичных колец предложение 1 доказано. Отметим, что $(\tau(e^{\alpha\varphi_i\begin{pmatrix}01\\ 00\end{pmatrix}}))=(\tau\overline{\varphi_i}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix})$. Для произвольных колец $S$ мы получили, что $((\tau(e^{\gamma\alpha\varphi_i\begin{pmatrix}01\\ 00\end{pmatrix}}-1)))^m$ лежит в первичном радикале (первичный радикал – это пересечение всех первичных идеалов кольца $S$). Так как первичный радикал является ниль идеалом, то $(\tau(e^{\alpha\varphi_i((\begin{pmatrix}01\\ 00\end{pmatrix})-1)}))^{m\cdot n}=0$, т.е. $(\tau(e^{\alpha\varphi_i((\begin{pmatrix}01\\ 00\end{pmatrix}))}))$ унипотентный. Предложение 1 доказано.

Докажем предложение 2. Покажем, что гомоморфизм групп $Q : E \to U(S)$ продолжается до гомоморфизма групп $Q_\lambda : E(g[\lambda]) \to U(S[\lambda])$. Зададим отображение $Q_\lambda$ на образующих $e^{\alpha(\lambda)\varphi_i\begin{pmatrix}01\\ 00\end{pmatrix}}$, $e^{\alpha(\lambda)\varphi_i\begin{pmatrix}00\\ 10\end{pmatrix}}$.

По предложению 1, $Q(e^{\alpha\varphi_i\begin{pmatrix}01\\ 00\end{pmatrix}})=e^{\alpha x_i}$, $Q(e^{\alpha\varphi_i\begin{pmatrix}00\\ 10\end{pmatrix}})=e^{\alpha y_i}$, где $x_i$ и $y_i$ – нильпотентные элементы кольца $S$.

Положим

$$\tau(e^{\alpha(\lambda)\varphi_i\begin{pmatrix}01\\ 00\end{pmatrix}})=e^{\alpha(\lambda)x_i},\quad \tau(e^{\alpha(\lambda)\varphi_i\begin{pmatrix}00\\ 10\end{pmatrix}})=e^{\alpha(\lambda)y_i}. \tag{5}$$

Докажем, что отображение образующих продолжается до гомоморфизмов групп. Для этого надо доказать, что если произведение элементов равно 1, то произведение их образов тоже равно 1.

Доказательство. Действительно, правая часть – это произведение образов элементов, задаваемых равенством (5), которое является многочленом от $\lambda$ с коэффициентами из $S$. Оно равно 1 для любого фиксированного $\lambda$, так как выполнено равенство (4) и $Q$ – гомоморфизм групп.

Мы получили, что многочлен равен 1 для любых фиксированных рациональных, и значит он тождественно равен 1 (алгебраическое и функциональное равенство многочленов над полем рациональных чисел). Итак, равенства (5) задают гомоморфизм групп.

$Q_\lambda : E(g[\lambda]) \to u(s[\lambda])$. Получаем индуцированный гомоморфизм $\overline{Q}[E_\lambda] \to (Q_\lambda[E_\lambda])/N$, где $N=\{A\in U(s[\lambda])|A-1\in\lambda^2S[\lambda]\}$. Зададим гомоморфизм алгебры Ли $\tau : g \to S$.

Положим $\tau(A\cdot\alpha\varphi_i(\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix} A^{-1}) = ad(Q(A)\alpha x_i\cdot Q(A^{-1}))$, где $x_i$ из формулы (4), $\alpha$ – рациональное число, $A\in E$.

Чтобы проверить, что отображение $\tau$, заданное на образующих векторного пространства $g$, задает гомоморфизм векторных пространств, надо показать, что если

$$\sum_{j,i,k} A_{ji}\alpha_k\varphi_i(\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix})A^{-1} = 0, \tag{6}$$

то

$$ad\sum_{j,i,k} Q(A_{ji})\cdot\alpha_i\cdot x_i\cdot Q(A_{ji}^{-1}) = 0, \tag{7}$$

где суммы конечные.

Действительно, пусть выполнено равенство (6). Тогда $\prod_{j,i,k} A_{j,i}e^{\alpha_k\lambda\varphi_i(\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix})}\cdot A_{j,i}^{-1}\in C_{\lambda^2}$ и, следовательно, по условию (3), $[B,\prod_{j,i,k} A_{j,i}e^{\alpha_k\lambda\varphi_i(\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix})}\cdot A_{j,i}^{-1}]\subseteq E_{\lambda^2}$. Отсюда следует, что

$$\overline{Q}[(B,\prod_{j,i,k} A_{j,i}e^{\alpha_k\lambda\varphi_i(\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix})}\cdot A_{j,i}^{-1})]\subseteq\overline{Q}(E_{\lambda^2}) = 1. \tag{8}$$

Из равенства (8) вытекает, что $[Q(B),\prod_{j,i,k} Q(A_{j,i})e^{\lambda\alpha_k x_i}Q(A_{j,i})^{-1}]\in N$ и значит

$$Q(B)(\sum Q(A_{ji})\alpha_k x_i Q(A_{ji}^{-1})Q(B^{-1}) - \sum(Q(A_{ji})\alpha_k x_i Q(A_{ji}^{-1}) = 0.$$

Но кольцо $S$ порождается $Im\tau$, значит $\sum_{i,j,k} Q(A_{j,i})\alpha_k x_i Q(A_{j,i}^{-1})$ лежит внутри центра кольца $S$ и значит $ad(\sum_{i,j,k} Q(A_{j,i})\alpha_k x_i Q(A_{j,i}^{-1})) = 0$. Равенство (7) доказано, корректность доказана. Покажем, что отображение $\tau$ не только гомоморфизм векторных пространств, но и гомоморфизм алгебр Ли. Действительно, из определения $\tau$,

$$\tau(AaA) = Q(A)\tau(a)Q(A^{-1})), \tag{9}$$

где $a\in g$, $A\in E$.

Далее, полагая $A = (e^{\alpha B\varphi_i(\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix})B^{-1}})$, из равенства (9) получаем, что $\tau([B\varphi_i(\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix})B^{-1},a]) =$ $= [Q(B)\cdot x_i\cdot Q\cdot(B^{-1}),\tau(a)] = [\tau(B\varphi_i((\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix})B^{-1}),\tau(a))]$, но $B\varphi_i(\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix})B^{-1}$ порождает алгебру Ли $g$ как векторное пространство. Мы показали, что отображение $\tau$ сохраняет лиевскую операцию. Кроме того, $Q(e^{\alpha\varphi_i\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}}) = e^{\alpha x_i}$, $Q\varphi_i^{\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}} = adx_i$, $\tau(e^{\alpha\varphi_i\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}}) = e^{\alpha\varphi_i}$, $\tau\varphi_i\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix} = ady_i$, т.е. гомоморфизм групп Ли задается гомоморфизмом алгебры Ли. Предложение 2 доказано.

Доказательство предложения 3.

Пусть элемент $A\in\operatorname{Ker}Q$, тогда, по равенству (9),

$$\tau(AaA^{-1}-a) = Q(A)\cdot\tau(a)\cdot Q(A^{-1}) - \tau(a) = \tau(a)-\tau(a) = 0,$$

$AaA^{-1}-a\in\operatorname{Ker}\tau$ и $A\in C(\operatorname{Ker}\tau)$. Мы показали, что $\operatorname{Ker}Q\subseteq C(\operatorname{Ker}\tau)$. Пусть $B\in C(\operatorname{Ker}\tau)$, тогда $\tau(BaB^{-1}-a) = 0$, $Q(B)\tau(a)Q(B^{-1}) = \tau(a)$. Мы показали, что $e^{Q(B)adx_iQB^{-1}} = e^{\alpha adx_i}.e^{adz}(y) = e^z y(e^z)^{-1}$, значит элементы $[Q(B),e^{\alpha x_i}] = [Q(B),e^{\alpha y_i}]$ лежат в центре кольца $S$. Но группа $Q(E)$ порождается элементами $e^{\alpha x_i}$и $e^{\alpha y_i}$, значит коммутант $[Q(B),Q(E)]$ лежит в центре кольца $S$ и, следовательно, $[Q(B),[Q(E),Q(E)]] = 1$.

Наконец, $E = [E, E]$ и, следовательно, $Q[B, E] = Q[B, [E, E]] = [Q(B)]$, $[Q(E), Q(E)] = 1$, тогда $[Q(B), Q(E)] = 1$, т.е. $[B, E] \in \operatorname{Ker} Q$. Мы показали $[E, C(\operatorname{Ker} \tau)] \subseteq \operatorname{Ker} Q \subseteq C(\operatorname{Ker} \tau)$.

Предложение 3 доказано.

Полученные результаты справедливы, в частности, для широкого класса линейных и унитарных групп над кольцами, а также групп лиева типа над кольцами, в частности, для групп Шевалле над коммутативным алгебрами нулевой характеристики.

## Список литературы


[1] I. Golubchik. Lie type groups over PI-rings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 2:399-424, 1997.

[2] I. Golubchik, A. Ismagilova. Isomorphisms of the unitary group over a ring. *J. Math. Sci*, 2:1074–1086, 2008.

[3] E. Bunina. Automorphisms of elementary adjoint Chevalley groups of types over local rings. *Algebra and Logic*, 4:250–267, 2009.

[4] I. Golubchik. Isomorphisms of General Linear Group $GL_n(R)$, $n > 3$ over an Associative Ring. *Amer. Math. Soc.*, 1:123-136, 1992.

[5] I. Golubchik, A. Mikhalev. Isomorphisms of the general linear groups over an associative ring. *Vest. MSU*, 3:61-72, 1983.

[6] I. Golubchik, A. Mikhalev. Isomorphism of unitary groups over associative rings. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 2:97-109, 1983.

[7] E. Zelmanov. Isomorphisms of linear groups over an associative ring. *Sibirsk. Mat.*, 4:49-67, 1985.

[8] I. Golubchik. Epimorphisms groups of Lie type. *Int. conf. Nov.*, 2000.

# Representations of Lie groups

*I.Z. Golubchik*[1], *A.I. Murseeva*[2]
1 – M. Akmullah Bashkir State Pedagogical University (Ufa, Russia)
2 – Ufa Polytechnic College (Ufa, Russia)

**Keywords:** Chevalley groups, representations of groups, groups of Lie type.

Concepts of almost Lie groups generalizing Chevalley groups and Lie groups are offered. Homomorphisms of these groups in groups of invertible $u(R)$ elements are also studied.