Численные методы для дробного уравнения диффузии с наследственностью

В.Г. Пименов[1,2]
V.G.Pimenov@urfu.ru

А.С. Хенди[1,3]
ahmed.hendy@fsc.bu.edu.eg

1 – УрФУ (Екатеринбург) 2 – ИММ УрО РАН (Екатеринбург)
3 – Университет Бенха (Египет)

Аннотация

В работе рассматривается методика построения разностных схем для уравнений в частных производных дробного порядка с эффектом запаздывания по времени. Для уравнения диффузии с двусторонней дробной производной по пространству и функциональным последействием по времени сконструирован неявный численный метод и получен порядок его сходимости. Метод является аналогом схемы Кранка–Никольсон, также в нем используются интерполяция и экстраполяция предыстории модели по времени. Теоретические результаты сопровождаются вычислительным примером.

1 Введение

Дробное дифференциальное исчисление и дробные дифференциальные уравнения [1, 2, 3, 4, 5] в настоящее время вызывают большой интерес у исследователей в силу точности моделей при описании объектов в различных областях науки. Многочисленные приложения описаны, например, в книгах [6, 7, 8]. Уравнения в частных производных дробного порядка делятся на два больших класса: с дробной производной по пространству и с дробной производной по времени. В настоящее время существует большое число работ по численным методам решения таких уравнений, например [9, 10, 11, 12, 13]; разработанные алгоритмы активно применяются в моделировании.

В моделях может содержаться еще один эффект — последействие по времени [14, 15]. Численные методы решения таких уравнений рассматривались во многих работах, см. например [16, 17, 18]. В работе [19] для уравнения теплопроводности с запаздыванием была предложена методика конструирования и исследования на устойчивость и сходимость численных алгоритмов, использующая как общую теорию разностных схем [20], так и теорию численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений [21, 22]. Затем эта методика была применена для исследования численных методов решения уравнений гиперболического типа с запаздыванием [23], двумерных уравнений параболического типа [24] и других типов уравнений в частных производных с эффектом наследственности [25]. В данной работе эта методика применяется для уравнений с частными производными дробного порядка с эффектом запаздывания.

Настоящая работа существенно использует результаты работы [10], где конструировались и исследовались явный и чисто неявный численные методы решения уравнения с двусторонней дробной производной по пространственной переменной. В работе [9] исследовался аналог метода Кранка–Никольсон для уравнения с левосторонней дробной частной производной по пространству. В нашей работе конструируется

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications", Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at http://ceur-ws.org

и исследуется аналог метода Кранка–Никольсон для уравнения с двусторонней дробной производной по пространственной переменной и с функциональным запаздыванием. Отметим, что в работе [26] данная методика анонсировалась при конструировании численного метода решения уравнения с левосторонней дробной частной производной по пространству и с запаздыванием по времени.

2 Постановка задачи

Рассмотрим начально-граничную задачу с функциональным запаздыванием для уравнения диффузии дробного порядка $1 < \alpha \leqslant 2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_+(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha} + c_-(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial_- x^\alpha} + f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot)), \tag{1}$$

где $x \in [0,X]$, $t \in [t_0,T]$, $c_+(x) > 0$, $c_-(x) > 0$; $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), -\tau \leqslant s < 0\}$ — предыстория функции, $\tau > 0$ — величина запаздывания,
с начальными условиями

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ x \in [0,X],\ t \in [t_0-\tau, t_0]$$

и с граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(X,t) = 0,\ t \in [t_0,T].$$

Левосторонняя и правосторонняя производные определены в смысле Римана–Лиувилля

$$\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_+ x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-1}}d\xi,$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_- x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_x^X \frac{u(\xi)}{(\xi-x)^{\alpha-1}}d\xi.$$

Будем предполагать, что функции $\varphi(x,t)$, $c_+(x)$, $c_-(x)$ и функционал f таковы, что эта задача имеет единственное решение $u(x,t)$. Кроме того, будем предполагать, что функционал $f(x,t,u,v(\cdot))$, определенный на $[0,X]\times[t_0,T]\times R\times Q$, липшицев по двум последним аргументам. Здесь через $Q = Q[-\tau,0)$ обозначено пространство функций $u(\cdot)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau,0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, определим в Q норму функций соотношением $\| u(\cdot) \|_Q = \sup_{s\in[-\tau,0)} |u(s)|$.

3 Дискретизация задачи

Пусть $h = X/N$, $\Delta = (T-t_0)/M$, где N, M — положительные целые числа (предполагаем без ограничения общности, что $\tau/\Delta = m$ — положительное целое), введем $x_i = ih$, $i = 0,\ldots,N$, и $t_j = t_0 + j\Delta$, $j = 0,\ldots,M$. Обозначим через u_j^i приближения значений функции $u(x_i,t_j)$ в узлах.

Для каждого фиксированного $i = 0,\ldots,N$ введем дискретную предысторию к моменту времени t_j, $j = 0,\ldots,M$: $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j-m \leqslant k \leqslant j\}$. Отображение $I : \{u_k^i\}_j \to v^i(t)$, $t \in [t_j-\tau, t_j+\Delta/2]$ будем называть оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории. Мы будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v^i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}(u_l^i(t-t_{l-1}) + u_{l-1}^i(t_l-t)), & t_{l-1} \leqslant t \leqslant t_l,\ 1 \leqslant l \leqslant j, \\ \frac{1}{\Delta}(u_j^i(t-t_{j-1}) + u_{j-1}^i(t_j-t)), & t_j \leqslant t \leqslant t_j+\Delta/2, \\ \varphi(x_i,t), & t_0-\tau \leqslant t \leqslant t_0. \end{cases}$$

Мы будем использовать приближения, основанные на определении Летникова–Грюнвальда сдвинутых левосторонней и правосторонней производных, соответственно,

$$\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_+ x^\alpha} = \lim_{N_+\to\infty}\frac{1}{(\Delta x_+)^\alpha}\sum_{k=0}^{N_+} g_{\alpha,k}u(x-(k-1)\Delta x),$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_- x^\alpha} = \lim_{N_-\to\infty} \frac{1}{(\Delta x_-)^\alpha} \sum_{k=0}^{N_-} g_{\alpha,k} u(x+(k+1)\Delta x),$$

где N_+, N_- — положительные целые числа, $\Delta x_+ = (x)/N_+$, $\Delta x_- = (X-x)/N_-$ и нормализованные веса Грюнвальда определяются соотношениями $g_{\alpha,0}=1$, $g_{\alpha,k} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ для $k=1,2,3,\ldots$.

При использовании полученных на основе этих определений сдвинутых формул численного дифференцирования для дробных производный, а также используя обычную аппроксимацию производной по времени, с использованием интерполяции и экстраполяции дискретной предыстории, дискретизация уравнения (1) в узлах $(x_i, t_{j+1/2})$ дает аналог метода Кранка–Никольсон:

$$\frac{u^i_{j+1} - u^i_j}{\Delta} = \frac{1}{h^\alpha}\Big(c^i_+ \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u^{i-s+1}_{j+1/2} + c^i_- \sum_{s=0}^{N-i+1} g_{\alpha,s} u^{i+s-1}_{j+1/2}\Big) + f^i_{j+\frac12}, \qquad (2)$$

$$f^i_{j+\frac12} = f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, v^i(t_j+\frac{\Delta}{2}), v^i_{t_j+\frac{\Delta}{2}}(\cdot)),\ i=1,\ldots,N-1,\ j=0,\ldots,M-1,$$

$c^i_+ = c_+(x_i)$, $c^i_- = c_-(x_i)$, $u^i_{j+1/2} = \frac12(u^i_j + u^i_{j+1})$,
с соответствующими начальными и граничными условиями
$u^i_0 = \varphi(x_i, t_0),\ i=0,\ldots,N,\ v^i_j(t) = \varphi(x_i,t),\ t<t_0,\ i=0,\ldots,N,$
$u^0_j = 0,\quad u^N_j = 0,\ j=0,\ldots,M.$

Обозначим

$$\delta^+_{\alpha,x} u^i_j := \frac{c^i_+}{h^\alpha}\sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u^{i-s+1}_j, \quad \delta^-_{\alpha,x} u^i_j := \frac{c^i_-}{h^\alpha}\sum_{s=0}^{N-i+1} g_{\alpha,s} u^{i+s-1}_j,$$

тогда (2) можем переписать в следующем виде

$$\frac{u^i_{j+1} - u^i_j}{\Delta} = \frac12\Big(\delta^+_{\alpha,x}u^i_j + \delta^+_{\alpha,x}u^i_{j+1} + \delta^-_{\alpha,x}u^i_j + \delta^-_{\alpha,x}u^i_{j+1}\Big) + f^i_{j+\frac12}. \qquad (3)$$

Если $\alpha = 2$, $c(x) = c_+(x) + c_-(x)$, мы получаем схему Кранка–Никольсон для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами и с функциональным запаздыванием, так как

$$\delta_{2,x} u^i_j = \delta^+_{\alpha,x}u^i_j + \delta^-_{\alpha,x}u^i_j = \frac{u^{i-1}_j - 2u^i_j + u^{i+1}_j}{h^2}.$$

4 Исследование локальной погрешности

Обозначим через $\varepsilon^i_j = u(x_i,t_j) - u^i_j$ погрешность метода в узлах. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует постоянная C, не зависящая от h и Δ, такая, что $|\varepsilon^i_j| \leqslant C(h^p+\Delta^q)$ для всех $i=0,1,\ldots,N$ и $j=0,1,\ldots,M$. Для нахождения порядка сходимости исследуем порядок локальной погрешности (невязки).

Невязкой (без интерполяции) метода (3) назовем выражение

$$\psi^i_j = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_{j+1})}{\Delta} - \frac12\Big(\hat\delta^+_{\alpha,x}u(x_i,t_j) + \hat\delta^+_{\alpha,x}u(x_i,t_{j+1}) +$$

$$+\hat\delta^-_{\alpha,x}u(x_i,t_j) + \hat\delta^-_{\alpha,x}u(x_i,t_{j+1})\Big) - \hat f^i_{j+\frac12},$$

$$\hat\delta^+_{\alpha,x}u(x_i,t_j) = \frac{c^i_+}{h^\alpha}\sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s}u(x_{i-s+1},t_j), \quad \hat\delta^-_{\alpha,x}u(x_i,t_j) = \frac{c^i_-}{h^\alpha}\sum_{s=0}^{N-i+1} g_{\alpha,s}u(x_{i+s-1},t_j),$$

$$\hat f^i_{j+\frac12} = f(x_i, t_{j+\frac12}, u(x_i,t_{j+\frac12}), u_{t_{j+\frac12}}(x_i,\cdot)).$$

Для каждого фиксированного $i=0,\ldots,N$ введем дискретную предысторию точного решения в точках разбиения по времени t_j, $j=0,\ldots,M: \{u(x_i,t_k)\}_j = \{u(x_i,t_k), j-m \leqslant k \leqslant j\}$. Мы будем использовать

$$w^i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}(u(x_i,t_l)(t-t_{l-1}) + u(x_i,t_{l-1})(t_l - t)), & t_{l-1}\leqslant t \leqslant t_l,\ 1\leqslant l\leqslant j, \\ \frac{1}{\Delta}(u(x_i,t_j)(t-t_{j-1}) + u(x_i,t_{j-1})(t_j - t)), & t_j \leqslant t\leqslant t_j+\Delta/2, \\ \varphi(x_i,t), & t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0. \end{cases}$$

Невязкой (с интерполяцией) метода (3) назовем следующую сеточную функцию

$$\nu_j^i = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_{j+1})}{\Delta} - \frac{1}{2}\Big(\hat{\delta_{\alpha,x}^{+}} u(x_i,t_j) + \hat{\delta_{\alpha,x}^{+}} u(x_i,t_{j+1}) + \hat{\delta_{\alpha,x}^{-}} u(x_i,t_j) +$$

$$+\hat{\delta_{\alpha,x}^{-}} u(x_i,t_{j+1})\Big) - \check{f}^i_{j+\frac{1}{2}},\ \check{f}^i_{j+\frac{1}{2}} = f\left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, w^i\left(t_j + \frac{\Delta}{2}\right), w^i_{t_j+\frac{\Delta}{2}}(\cdot)\right)$$

Лемма 1. *Пусть в своих областях определения точное решение задачи $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по t и четырежды непрерывно дифференцируемо по x, а также дробные производные $\frac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha}$ и $\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_- x^\alpha}$ дважды непрерывно дифференцируемы по x. Тогда невязка (без интерполяции) метода имеет порядок $\Delta^2 + h$.*

Доказательство проводится с помощью тейлоровского разложения невязки в окрестности точки $(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы 1, тогда невязка метода с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок $\Delta^2 + h$.*

Результат следует из предыдущей леммы с учетом того, что оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением имеет второй порядок [19, 22],

5 Сведение к общей разностной схеме с наследственностью

Перепишем метод (3) в виде

$$\left(1 - \frac{\Delta}{2}(\delta_{\alpha,x}^{+} + \delta_{\alpha,x}^{-})\right) u^i_{j+1} = \left(1 + \frac{\Delta}{2}(\delta_{\alpha,x}^{+} + \delta_{\alpha,x}^{-})\right) u^i_j + \Delta f^i_{j+\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Для того чтобы свести метод к общей схеме [19, 25], введем вектора $y_j = (u_j^1, u_j^2, \cdots, u_j^{N-1}) \in Y$, $\parallel y_j \parallel_Y = \max_{1\leqslant i\leqslant N-1} |u_j^i|$. Тогда метод (4) может быть переписан в виде

$$(E + A)y_{j+1} = (E - A)y_j + \Delta F_{j+\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где элементы матрицы A размера $(N-1)\times(N-1)$ имеют вид

$$A_{ij} = \begin{cases} -(\xi_i + \eta_i)g_{\alpha,1} & j = i, \\ -(\xi_i g_{\alpha,2} + \eta_i g_{\alpha,0}) & j = i-1, \\ -(\xi_i g_{\alpha,0} + \eta_i g_{\alpha,2}) & j = i+1, \\ -\xi_i g_{\alpha,i-j+1} & j < i-1, \\ -\xi_i g_{\alpha,j-i+1} & j > i+1, \end{cases}$$

E — единичная матрица, $\xi_i = \frac{c_+^i \Delta}{2h^\alpha}$, $\eta_i = \frac{c_-^i \Delta}{2h^\alpha}$, $F_{j+\frac{1}{2}} = (f^1_{j+\frac{1}{2}}, f^2_{j+\frac{1}{2}}, \cdots, f^{N-1}_{j+\frac{1}{2}})$.

Лемма 3. [10]. *Матрица $E + A$ обратима.*

Так как матрица $E + A$ обратима, уравнение (5) может быть переписано в виде

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)), \tag{6}$$

$S = (E + A)^{-1}(E - A)$, $\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)) = (E + A)^{-1}F_{j+\frac{1}{2}}$, I — оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением.

Лемма 4. [10]. *Если $1 < \alpha < 2$, то все собственные значения матрицы $S = (E + A)^{-1}(E - A)$ по модулю меньше единицы.*

Из этой леммы следует, что найдется такая константа $\hat{S}$, что

$$\|S^n\| \leqslant \hat{S} \tag{7}$$

для всех натуральных n. Это означает, что метод (6) устойчив.

Теорема сходимости. *При условиях леммы* 1 *(достаточная гладкость решения) и леммы* 4 $(1 < \alpha < 2)$ *метод* (3) *с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением сходится с порядком* $\Delta^2 + h$.

Теорема вытекает из вложения в общую схему [19, 25] с учетом утверждений лемм 2 и 4.

Таблица 1: Максимальная погрешность в зависимости от h и порядок сходимости.

h	$\alpha = 1.1$		$\alpha = 1.9$	
	$E(\Delta, h)$	$order_s$	$E(\Delta, h)$	$order_s$
$1/20$	0.00497		0.0027	
$1/40$	0.00252	0.9752	0.0014	0.9865
$1/80$	0.00127	0.9887	0.0007	0.9984
$1/160$	0.00064	0.9996	0.0003	0.9997
$1/320$	0.00032	0.9999	0.0002	1.0002

Таблица 2: Максимальная погрешность в зависимости от Δ и порядок сходимости.

Δ	$\alpha = 1.1$		$\alpha = 1.9$	
	$E(\Delta, h)$	$order_t$	$E(\Delta, h)$	$order_t$
$1/16$	0.0054		0.0022	
$1/32$	0.0014	1.979	0.0005	1.988
$1/64$	0.0003	1.985	0.0001	1.993
$1/128$	0.00008	1.996	0.00003	1.999
$1/256$	0.000002	1.999	8.7×10^{-6}	2.001

6 Численный пример

Рассмотрим уравнение с двусторонними дробными производными по пространству и с переменным запаздыванием по времени

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = (x-1/2)^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial x_{+}^{\alpha}} + (3/2-x)^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial x_{-}^{\alpha}} + f,$$

$f = -\frac{\exp(-t)}{\ln(\exp(-t/2)(x-1/2)^3(3/2-x)^3)}\Big((x-1/2)^3(3/2-x)^3 + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)}(x-1/2)^3(3/2-x)^3 - \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)}(x-1/2)^4(3/2-x)^4 + \frac{3\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)}(x-1/2)^5(3/2-x)^5 - \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7-\alpha)}(x-1/2)^6(3/2-x)^6\Big)\ln(u(x,t-t/2))$,
где $1/2 \leqslant x \leqslant 3/2, \quad 1 \leqslant t \leqslant 5$, α — постоянная ($1 < \alpha < 2$), с начальными и граничными условиями вида

$$u(x,r) = \exp(-r)(x-1/2)^3(3/2-x)^3, \quad 1/2 \leqslant r \leqslant 1, \quad 1/2 \leqslant x \leqslant 3/2,$$

$$u(1/2,t) = 0, \quad u(3/2,t) = 0, \quad 1 \leqslant t \leqslant 5.$$

Точное решение $u(x,t) = \exp(-t)(x-1/2)^3(3/2-x)^3$.

Определим максимальную погрешность соотношением

$$E(\Delta, h) = \max_{0\leqslant j\leqslant M,\ 0\leqslant i\leqslant N} \mid u(x_i, t_j) - u_j^i \mid.$$

Протестируем погрешность и порядок сходимости метода в зависимости от пространственного шага h, который меняется от $\frac{1}{20}$ до $\frac{1}{320}$, при фиксированном временно́м шаге $\Delta = \frac{4}{1024}$. Порядок сходимости относительно пространственного шага h характеризуется величиной $order_s = \log_2\left(\frac{E(\Delta,2h)}{E(\Delta,h)}\right)$, которая приводится в таблице 1.

Для исследования зависимости максимальной погрешности $E(\Delta, h)$ от временно́го шага, зафиксируем $h = \frac{1}{4000}$ и будем менять Δ от $\frac{1}{16}$ до $\frac{1}{256}$. Порядок сходимости относительно временно́го шага Δ характеризуется величиной $order_t = \log_2\left(\frac{E(2\Delta,h)}{E(\Delta,h)}\right)$, что проиллюстрировано в табл. 2.

Благодарности

Исследования поддержаны Программой повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) и проектом РНФ №14-35-00005.

Список литературы

[1] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Boca Raton: CRC Press, 1993.

[2] K. Miller, B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* New York: Wiley, 1993.

[3] I. Podlubny. *Fractional differential equations.* San Diego: Acad. Press, 1999.

[4] A. V. Pskhu. *The equations in partial derivatives of a fractional order.* Moscow: Nauka, 2005 (in Russian). = А. В. Псху. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* Москва: Наука, 2005.

[5] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional differential equations.* Berlin: Springer, 2010.

[6] A. M. Nakhushev. *Equations of mathematical biology.* Moscow: Vysshaya shkola, 1995 (in Russian). = А. М. Нахушев. *Уравнения математической биологии.* Москва: Высшая школа, 1995.

[7] V. V. Vasilyev, Л. A. Simak. *Fractional calculation and approximating methods in modeling of dynamic system.* Kiev: NAN of Ukraine, 2008 (in Russian). = В. В. Васильев, Л. А. Симак. *Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем.* Киев: НАН Украины, 2008.

[8] V. E. Tarasov. *Fractional dinamics: Applicaions of Fractional Calculus to dinamics of Particles, Fields and Media.* Berlin: Springer, 2010.

[9] C. Tadjeran, M. M. Meerschaert, H. P. Scheffler. A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics.* 213: 205–214, 2006.

[10] M. M. Meerschaert, C. Tadjeran. Finite difference approximations for two sided space fractional partial differential equations. *Applied numerical mathematics.* 65: 80–90, 2006.

[11] F. Liu, M. M. Meerschaert. Numerical methods for solving the multy-term time-fractional wave diffusion equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis.* 16(1): 9–25, 2013.

[12] A. Alikhanov. A new difference for the time-fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics.* 280: 424–438, 2015.

[13] F. Liu, P. Zhuang, I. Turner, V. Anh, K. Burrage. A semi-alternating direction method fora 2-D fractional FitsHugh-Nagumo monodomain model on an approximate irregular domain. *Journal of Computational Physics.* 293: 252–263, 2015.

[14] J. Wu. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations.* New York: Springer-Verlag, 1996.

[15] B. Zhang, Y. Zhou. *Qualitative Analysis of Delay Partial Difference Equations. Vol. 4.* New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007.

[16] B. Zubik-Kowal. The method of lines for parabolic differential-functional equations. *IMA J. Numer. Anal.* 17: 103–123, 1997.

[17] K. Kropielnicka. Convergence of Implicit Difference Methods for Parabolic Functional Differential Equations. *Int. Journal of Mat. Analysis.* 1(6): 257–277, 2007.

[18] P. Garcia, M. A. Castro, J. A. Martin, A. Sirvent. Covergence of two implicit numerical schemes for diffusion mathematical models with delay. *Mathematical and Computer Modelling.* 52: 1279–1287, 2010.

[19] V. G. Pimenov, A. B. Lozhnikov. Difference Schemes for the Numerical Solution of the Heat Conduction Equation with Aftereffect. *Proc. Steklov Inst. Math.* 275(S. 1): 137–148, 2011.

[20] A. A. Samarskii. *The Theory of Difference Schemes.* New York: Marcel Dekker, 2001.

[21] V. G. Pimenov. General Linear Methods for Numerical Solving Functional Differential Equations. *Differential Equations.* 37(1): 105–114, 2001.

[22] A. V. Kim, V. G. Pimenov. *i-Smooth Analysis and Numerical Methods for Solving Functional Differential Equations.* Moscow-Izhevsk: Regulyarn. Khaotichesk. Dinamika, 2004 (in Russian). = А. В. Ким, В. Г. Пименов. *i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений.* Москва-Ижевск: РХД, 2004.

[23] V. G. Pimenov, E. E. Tashirova. Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type. *Proc. Steklov Inst. Math.* 281(S. 1): 126–136, 2013.

[24] V. G. Pimenov, A. V. Lekomtsev. Convergence of the Alternating Direction Methods for the Numerical Solution of a Heat Conduction Equation with Delay. *Proc. Steklov Inst. Math.* 272(S. 1): 101–118, 2011.

[25] V. G. Pimenov. *Difference methods for the solution of the equations in partial derivatives with heredity.* Ekaterinburg: UrFU, 2014 (in Russian). = В. Г. Пименов. *Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью.* Екатеринбург: УрФУ, 2014.

[26] V. G. Pimenov, A. S. Hendy. Numerical methods for the equation with fractional derivative on state and with functional delay on time. *Bulletin of the Tambov university. Series: Natural and technical science.* 20(5): 1358–1361, 2015.

Numerical methods for the fractional diffusion equation with heredity

Vladimir G. Pimenov[1,2], *Ahmed S. Hendy*[1,3]
1 – Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)
2 – Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)
3 – Banha University (Egypt)

Keywords: Fractional partial differential equation, Grunwald–Letnikov approximations, grid schemes, functional delay, interpolation, extrapolation, convergence order.

In this paper, we consider the technique of creation of differential schemes for the equations in partial derivatives of a fractional order with effect of delay on time. For the two sided space fractional diffusion equation with the time functional after-effect, an implicit numerical method is constructed and the order of its convergence is obtained. The method is a fractional analogue of the Crank–Nicholson method. It also uses interpolation and extrapolation of the prehistory of model with respect to time. Numerical experiments are carried out to support the obtained theoretical results.