Чувствительность качественных характеристик гамильтоновой системы к изменениям параметров модели роста

О.В. Русских[2]
olga9696@mail.ru

А.А. Усова[1]
anastasy.ousova@gmail.com

А.М. Тарасьев[1]
tam@imm.uran.ru

1 – ИММ УрО РАН (Екатеринбург) 2 – УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

Работа посвящена исследованию качественного поведения оптимальных решений задачи управления на бесконечном промежутке времени. Постановка задачи основана на двухфакторной модели экономического роста. Анализируется чувствительность оптимальных траекторий к изменениям параметров модели, в частности к параметрам производственной функции и дисконтирующему множителю. Показано, что для достаточно широкого диапазона допустимых значений параметров системы, гамильтонова динамика имеет стационарную точку типа седло или фокус, при этом ровно половина собственных значений системы обладает строго отрицательной действительной частью, а другая половина – строго положительной. Данный факт позволяет говорить о существовании нелинейного регулятора, стабилизирующего гамильтонову систему вблизи установившегося состояния. Стабилизированные решения позволяют оценить поведение оптимальных решений в окрестности положения равновесия с квадратичной точностью.

1 Введение

Работа посвящена исследованию качественного поведения оптимальных траекторий задачи управления на бесконечном промежутке времени. Основу задачи составляет модель экономического роста, в которой за счет перераспределения инвестиционных потоков, направленных в производственные факторы, происходит регулирование общего объема выпуска и оптимизация функционала качества. Общий объем выпуска зависит от факторов производства, эта связь описывается функцией Кобба–Дугласа. Функционал качества процесса управления определяется интегральным индексом потребления, дисконтированным на бесконечном промежутке времени. Параметр дисконтирования ρ играет важную роль в вопросе определения качественного поведения оптимальных траекторий.

Характер равновесия гамильтоновой системы, возникающей вследствие применения принципа максимума Понтрягина [6] для задач на бесконечном промежутке времени [1], важен с точки зрения построения оптимальных траекторий. А именно, от типа стационарной точки зависит вопрос существования нелинейного регулятора, стабилизирующего гамильтонову систему вблизи равновесия. В работе [9, 10] доказано,

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at http://ceur-ws.org

что в случае, когда стационарная точка является седлом, нелинейный регулятор существует, а стабилизированные решения аппроксимируют оптимальные траектории с квадратичной точностью. Используя решение стабилизированной системы в окрестности равновесия, в обратном времени осуществляется восстановление оптимальной траектории (см. [4, 9]).

В данной работе рассматривается Якобиан гамильтоновой системы, вычисленный в стационарной точке. Показано, что матрица Якоби представима в виде суммы гамильтоновой и диагональной матриц. Про гамильтонову матрицу известно, что ее собственные значения симметричны относительно мнимой оси и меньше на $\rho/2$ собственных чисел Якобиана. Для различных параметров модели экономического роста экспериментально показано, что условия существования нелинейного регулятора выполняются, то есть ровно половина действительных частей собственных значений матрицы Якоби отрицательна, а другая половина — положительна.

В первом разделе статьи описываются основные модельные переменные и осуществляется постановка задачи управления. Второй раздел посвящен исследованию задачи управления в рамках принципа максимума Понтрягина и построению гамильтоновой системы. В третьей части статьи проводится качественный анализ гамильтоновой системы и выписываются свойства матрицы Якоби. Полученные результаты применяются для задачи с производственной функцией типа Кобба–Дугласа. В последнем разделе приводятся результаты численного анализа характера равновесия гамильтоновой системы, указываются диапазоны значений параметров, при которых качественное поведение системы не меняется, то есть стационарная точка является либо седлом, либо фокусом.

2 Двухфакторная модель экономического роста

Рассматривается задача оптимального управления, основанная на модели экономического роста, которая нацелена на анализ изменений внутреннего валового продукта (ВВП) Y страны в зависимости от таких производственных факторов, как основные фонды K, человеческий капитал L и полезная работа U. Понятие полезной работы U было введено в работе [2], оно по сути определяется как разница между природными ресурсами R и отходами от переработки природных ресурсов W: $U = R - W$. В итоге, этот фактор есть объем переработанных природных ресурсов, используемых для дальнейшего производства. В данной версии модели этот параметр является экзогенным фактором.

Связь между ВВП Y и производственными факторами описывается производственной функцией $F(\cdot)$:

$$Y = F(K, L, U)$$

Человеческий капитал L определяется как величина, пропорциональная общей численности работающего населения страны $P(t)$ [7]. Таким образом, для человеческого капитала L справедливо соотношение $L = EP$, где положительный коэффициент пропорциональности E определяет эффективность труда.

Предполагается, что изменение основного капитала K зависит от объема сбережений $S(t)$ и темпов обесценивания капитала δ:

$$\dot{K}(t) = S(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0.$$

Изменение человеческого капитала $L(t)$ в момент времени t пропорционально инвестициям $R(t)$, направленным на увеличение эффективности труда:

$$\dot{L}(t) = bR(t), \quad L(0) = L_0.$$

Относительно объемов инвестирования основного капитала и эффективности труда отметим, что суммарно они не превышают ВВП страны в момент времени t

$$Y(t) > S(t) + R(t) = (u_1(t) + u_2(t))Y(t) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant u_1(t) + u_2(t) < 1.$$

Ввиду неотрицательности величин $u_1(t)$ и $u_2(t)$, можно выбрать два таких числа a_1 и a_2, которые будут определять максимальные доли инвестиций, направленных в основной капитал $K(t)$ и эффективность труда $E(t)$ соответственно:

$$0 \leqslant u_1(t) \leqslant a_1 < 1, \quad 0 \leqslant u_2(t) \leqslant a_2 < 1.$$

Обозначим символом $\mathcal{U} = [0, a_1] \times [0, a_2]$ область, которой принадлежат инвестиционные составляющие u_1, u_2, а символом u — вектор (u_1, u_2).

Предполагается, что численность рабочей силы $P(t)$ обладает экспоненциальной динамикой с темпом роста, равным постоянной положительной величине γ [7]:

$$\dot{P}(t) = \gamma P(t).$$

Введем величины $y(t), x_1(t), x_2(t), v(t)$, определяющие в момент времени t ВВП $Y(t)$, человеческий капитал $L(t)$ и полезную работу $U(t)$ [2], отнесенные к численности работающего населения $P(t)$ страны соответственно:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{P(t)}, \quad x_1(t) = \frac{K(t)}{P(t)}, \quad x_2(t) = \frac{L(t)}{P(t)}, \quad v(t) = \frac{U(t)}{P(t)}.$$

Благодаря свойству положительной однородности производственной функции, в новых переменных она может быть записана в виде

$$y(t) = \frac{Y(t)}{P(t)} = F(x_1(t), x_2(t), v(t)).$$

Динамика основного капитала $x_1(t)$, отнесенного к численности рабочей силы, и эффективность труда $x_2(t)$ изменяются согласно уравнениям

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t)y(t) - (\delta + \gamma)x_1(t), \quad x_1(t_0) = x_1^0. \tag{1}$$

$$\dot{x}_2(t) = bu_2(t)y(t) - \gamma x_2(t), \quad x_2(t_0) = x_2^0. \tag{2}$$

Полезная работа $U(t)$ здесь рассматривается как экзогенный параметр. Предполагается, что относительный уровень полезной работы $v(t) = U(t)/P(t)$ есть постоянная величина $\bar{v}$, определяемая среднестатистическим значением.

Таким образом, производственная функция может быть записана в виде

$$y = F(x_1, x_2, \bar{v}) = f(x_1, x_2) = f(x).$$

Предполагается, что функция $f(x)$ для $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, удовлетворяет условиям

PF1. *Возрастания по переменным x_1 и x_2, то есть $f'_{x_1}(x) > 0$ и $f'_{x_2}(x) > 0$;*

PF2. *Строгой вогнутости, то есть матрица Гёссе является отрицательно определенной:*

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(x) & f''_{x_1x_2}(x) \\ f''_{x_1x_2}(x) & f''_{x_2^2}(x) \end{pmatrix} < 0.$$

В силу замкнутости экономической системы, уровень потребления $C(t)$ определяется равенством

$$C(t) = Y(t)(1 - u_1(t) - u_2(t)),$$

которое может быт переписано в относительных величинах следующим образом:

$$c(t) = \frac{C(t)}{P(t)} = y(t)(1 - u_1(t) - u_2(t)) \approx y(t)(1 - u_1(t))(1 - u_2(t)).$$

Последнее равенство получено в предположении, что произведение $u_1(t)u_2(t)$ имеет больший порядок малости, нежели его составляющие $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

Функция полезности рассматривается в виде интеграла от логарифмического индекса потребления, дисконтированного на бесконечном промежутке времени:

$$J(\cdot) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\ln\left(1 - u_1(t)\right) + \ln\left(1 - u_2(t)\right) + \ln f(x(t))\right) dt, \quad \rho > 0. \tag{3}$$

Положительный параметр ρ является дисконтирующим множителем.

Описанная модель развития экономики за счет перераспределения инвестиционных потоков в различные факторы производства приводит к следующей постановке задачи оптимального управления на бесконечном промежутке времени.

Задача. *Требуется найти такие инвестиционные стратегии $u^0(t) = (u_1^0(t),\, u_2^0(t)) \in \mathcal{U}$, которые максимизируют функционал $J(\cdot)$ (3) на траекториях динамической системы (1), (2).*

3 Исследование задачи оптимального управления

3.1 Гамильтониан задачи управления

Задача управления удовлетворяет всем условиям теоремы существования [3], а также условиям оптимальности как для задач с бесконечным горизонтом в рамках принципа максимума Понтрягина [1, Теорема 18.2, стр. 171].

Выпишем гамильтониан задачи оптимального управления

$$\widetilde{H}(t,x,u,\widetilde{\psi})=e^{-\rho t}\big(\ln(1-u_1)+\ln(1-u_2)+\ln f(x)\big)+\widetilde{\psi}_1(u_1f(x)-(\delta+\gamma)x_1)+\widetilde{\psi}_2(bu_2f(x)-\gamma x_2).$$

Сопряженные переменные $\widetilde{\psi}=(\widetilde{\psi}_1,\widetilde{\psi}_2)$ определяют "теневую цену" капитала x_1 и эффективности труда x_2 соответственно.

Выпишем необходимые условия оптимальности согласно работе [1, Теорема 18.2, стр. 171] применительно к исследуемой задаче управления.

Теорема 1 (Асеев С.М., Кряжимский А.В.). *Пусть набор $(x^0,u^0)=(x_1^0,x_2^0;u_1^0,u_2^0)$ обозначает оптимальный процесс. Тогда существует вектор сопряженных переменных $\widetilde{\psi}=(\widetilde{\psi_1},\widetilde{\psi_2})$, соответствующий процессу $(x_1^0,x_2^0;u_1^0,u_2^0)$ и удовлетворяющий сопряженным уравнениям*

$$\dot{\widetilde{\psi_1}}=-\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x_1}(t,x^0(t);u^0(t),\widetilde{\psi}(t)),\qquad \dot{\widetilde{\psi_2}}=-\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x_2}(t,x^0(t);u^0(t),\widetilde{\psi}(t)),\quad \text{такой, что}$$

1. *Процесс (x^0,u^0) удовлетворяет условиям принципа максимума Понтрягина вместе с сопряженными переменными $\widetilde{\psi_1}$ и $\widetilde{\psi_2}$*

$$\widetilde{H}(t,x^0(t);u^0(t),\widetilde{\psi}(t))=\max_{u\in\mathcal{U}}\widetilde{H}(t,x^0(t);u,\widetilde{\psi}(t)),$$

2. *Процесс (x^0,u^0) и сопряженные переменные $\widetilde{\psi_1}$ и $\widetilde{\psi_2}$ удовлетворяют условию стационарности*

$$\widetilde{H}(t,x^0(t);u^0(t),\widetilde{\psi}(t))=\rho\int_t^{+\infty}e^{-\rho\tau}\left(\ln(1-u_1^0(\tau))+\ln(1-u_2^0(\tau))+\ln f(x^0(\tau))\right)d\tau,$$

3. *Сопряженные переменные положительны:* $\widetilde{\psi_1}(t)>0,\quad \widetilde{\psi_2}(t)>0,\quad \forall t\geqslant 0.$
4. *Выполнено условие трансверсальности* $\lim_{x\to\infty}\left(\widetilde{\psi_1}x_1(t)+\widetilde{\psi_2}x_2(t)\right)=0.$

Для дальнейшего описания удобно сделать замену переменных $\psi_1=e^{\rho t}\widetilde{\psi}_1$, $\psi_2=e^{\rho t}\widetilde{\psi}_2$ и $\widehat{H}(\cdot)=e^{\rho t}\widetilde{H}(\cdot)$, которая избавит гамильтониан от явной зависимости от переменной времени t

$$\widehat{H}(x,u,\psi)=\ln(1-u_1)+\ln(1-u_2)+\ln f(x)+\psi_1(u_1f(x)-(\delta+\gamma)x_1)+\psi_2(bu_2f(x)-\gamma x_2).\tag{4}$$

Известно [12], что гамильтонова функция $\widehat{H}(x,u,\psi)$ (4) задачи управления обладает свойствами.

P1. *Гамильтониан $\widehat{H}(x,u,\psi)$ (4) строго вогнут по переменным управления u_1 и u_2.*

P2. *Максимизированный гамильтониан задачи управления $H(x,\psi)$ строится в соответствии с правилом*

$$H(x,\psi)=\max_{u\in\mathcal{U}}\widehat{H}(x,u,\psi)=\widehat{H}(x,u^{ij},\psi),\quad u_{ij}^0=(u_{1i}^0,u_{2j}^0),\ (x,\psi)\in D_{ij}=\Delta_1^i\cap\Delta_2^j,\ (i,j=1,2,3),$$

где множества Δ_1^i и Δ_2^j определяются следующим образом (здесь $A_i=(1-a_i)^{-1},\ i=1,2$):

$$\begin{aligned}
&\Delta_1^1=\{(x,\psi):\psi_1f(x)\leqslant 1\},\ u_1=0; && \Delta_2^1=\{(x,\psi):b\psi_2f(x)\leqslant 1\},\ u_2=0;\\
&\Delta_1^2=\{(x,\psi):1\leqslant\psi_1f(x)\leqslant A_1\},\ u_1^0=1-\frac{1}{\psi_1f(x)}; && \Delta_2^2=\{(x,\psi):1\leqslant b\psi_2f(x)\leqslant A_2\},\ u_2^0=1-\frac{1}{b\psi_2f(x)};\\
&\Delta_1^3=\{(x,\psi):\psi_1f(x)\geqslant A_1\},\ u_1^0=a_1; && \Delta_2^3=\{(x,\psi):b\psi_2f(x)\geqslant A_2\},\ u_2^0=a_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, максимизированный гамильтониан $H(x,\psi)$ склеивается из 9 ветвей $H_{ij}(x,\psi)$, каждая из которых определена на области D_{ij}, где действует пара управлений (u_{1i}^0,u_{2j}^0), $i,j=1,2,3$.

P3. *Максимизированный гамильтониан $H(x,\psi)$ есть гладкая функция своих переменных $x_1,x_2,\ \psi_1,\psi_2$.*

P4. *Максимизированный гамильтониан $H(x,\psi)$ является строго вогнутой функцией по фазовым переменным при положительных значениях сопряженных переменных $\psi_1 > 0, \psi_2 > 0$ во всех областях своего определения D_{ij}, $\quad i,j = 1,2,3$, кроме области переменного управления D_{22}. В области переменного управления D_{22} для строгой вогнутости максимизированного гамильтониана $H(x,\psi)$ требуется отрицательная определенность матрицы ∂f*

$$\partial f(x) = \begin{pmatrix} -f(x) & f'_{x_1}(x) & f'_{x_2}(x) \\ f'_{x_1}(x) & f''_{x_1^2}(x) & f''_{x_1 x_2}(x) \\ f'_{x_2}(x) & f''_{x_1 x_2}(x) & f''_{x_2^2}(x) \end{pmatrix} \quad \forall\,(x,\psi) \in D_{22}, \quad \psi_1 > 0,\, \psi_2 > 0. \tag{5}$$

Перечисленные свойства максимизированной гамильтоновой функции $H(x,\psi)$, обеспечивающие гладкость по переменным (x,ψ) и строгую вогнутость по фазовым переменным $x = (x_1, x_2)$ для всех положительных значений компонент сопряженного вектора $\psi = (\psi_1,\, \psi_2)$, гарантируют, что необходимые условия оптимальности принципа максимума Понтрягина являются достаточными [4].

3.2 Гамильтонова система

Для исследования качественного поведения оптимальных траекторий необходимо построить гамильтонову систему, которая вычисляется согласно формулам

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\partial H(x(t),\psi(t))}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i(t) = \rho\psi_i(t) - \frac{\partial H(x(t),\psi(t))}{\partial x_i},\ i = 1,2,3. \tag{6}$$

Согласно этим соотношениям, гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= u_1^0(t) f(x(t)) - (\delta+\gamma)x_1(t) = G_1(x(t),\psi(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= b u_2^0(t) f(x(t)) - \gamma x_2(t) = G_2(x(t),\psi(t)), \\ \dot{\psi}_1(t) &= (\delta+\gamma+\rho)\psi_1(t) - f'_{x_1}(x(t))\left(\dfrac{1}{f(x(t))} + u_1^0(t)\psi_1(t) + b u_2^0(t)\psi_2(t)\right) = G_3(x(t),\psi(t)), \\ \dot{\psi}_2(t) &= (\gamma+\rho)\psi_2(t) - f'_{x_2}(x(t))\left(\dfrac{1}{f(x(t))} + u_1^0(t)\psi_1(t) + b u_2^0(t)\psi_2(t)\right) = G_4(x(t),\psi(t)). \end{cases}$$

Согласно результатам исследования, проведенного в работе [12], стационарная точка может существовать только в областях D_{ij} с ненулевым режимом управления, $i,j \geqslant 2$. В этой связи, наиболее интересным представляется случай для области переменного управления D_{22}, которая описывается соотношениями

$$D_{22} = \left\{ (x,\psi) \ :\quad 1 \leqslant \psi_1 f(x) \leqslant \frac{1}{1-a_1}, \quad 1 \leqslant b\psi_2 f(x) \leqslant \frac{1}{1-a_2} \right\}. \tag{7}$$

Гамильтонова система в области D_{22} (7) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f(x(t)) - (\delta+\gamma)x_1(t) - \dfrac{1}{\psi_1(t)} = G_1(x(t),\psi(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= b f(x(t)) - \gamma x_2(t) - \dfrac{1}{\psi_2(t)} = G_2(x(t),\psi(t)) \\ \dot{\psi}_1(t) &= (\delta+\gamma+\rho)\psi_1(t) - \left(\psi_1(t) + b\psi_2(t) - \dfrac{1}{f(x(t))}\right) f'_{x_1}(x(t)) = G_3(x(t),\psi(t)) \\ \dot{\psi}_1(t) &= (\gamma+\rho)\psi_2(t) - \left(\psi_1(t) + b\psi_2(t) - \dfrac{1}{f(x(t))}\right) f'_{x_2}(x(t)) = G_4(x(t),\psi(t)). \end{cases} \tag{8}$$

Дальнейший анализ задачи управления состоит в исследовании гамильтоновой системы (8). Известно [4, 9, 10], что если гамильтонова система (8) обладает стационарной точкой, являющейся седлом или фокусом, то существует нелинейный регулятор, стабилизирующий динамическую систему (8) в окрестности установившегося состояния. Стабилизированные решения позволяют оценить асимптотическое поведение оптимальных решений с квадратичной точностью. Данное обстоятельство также играет ключевую роль в алгоритме построения оптимальных решений [4, 9].

4 Качественный характер стационарного уровня

Для дальнейшего анализа будем предполагать, что стационарная точка системы (8) существует и единственна. В случае с производственной функцией типа Кобба–Дугласа это предположение выполняется (см. [12]). Более того, можно сформулировать достаточные условия принадлежности стационарной точки (x^*, ψ^*) системы уравнений (8) области переменного управления D_{22} (7).

Утверждение 1. *Пусть система* (8) *обладает единственной стационарной точкой* (x^*, ψ^*) *и выполнены неравенства*

$$a_c \leqslant a_1 < 1, \quad a_c \leqslant a_2 < 1, \qquad \text{где} \quad a_c = \frac{\delta+\gamma}{\delta+\gamma+\rho}. \tag{9}$$

Тогда стационарная точка (x^*, ψ^*) *лежит в области переменных управляющих воздействий* D_{22} (7).

Отметим, что стационарная точка x^* и соответствующие этому состоянию управления (u_1^*, u_2^*), которые (в условиях *Утверждения 1*) находятся по формулам

$$u_1^* = (\delta+\gamma)\frac{x_1^*}{f(x^*)}, \quad u_2^* = \frac{\gamma}{b}\frac{x_2^*}{f(x^*)},$$

является равновесным решением задачи управления.

Следующим шагом необходимо определить характер установившегося состояния.

4.1 Качественное поведение решений гамильтоновой системы вблизи стационарной точки

Для определения качественного поведения оптимальных решений вблизи стационарного уровня (x^*, ψ^*), который, будем предполагать, существует, необходимо вычислить собственные числа матрицы Якоби J.

$$J = \begin{pmatrix} \partial G_x^1 & \partial G_\psi^1 \\ \partial G_x^2 & \partial G_\psi^2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \partial G_x^1 = \left\{\frac{\partial G_i(x^*,\psi^*)}{\partial x_j}\right\}_{i,j=1}^2, \quad \partial G_\psi^1 = \left\{\frac{\partial G_i(x^*,\psi^*)}{\partial \psi_j}\right\}_{i,j=1}^2, \tag{10}$$

$$\partial G_x^2 = \left\{\frac{\partial G_{2+i}(x^*,\psi^*)}{\partial x_j}\right\}_{i,j=1}^2, \quad \partial G_\psi^2 = \left\{\frac{\partial G_{2+i}(x^*,\psi^*)}{\partial \psi_j}\right\}_{i,j=1}^2.$$

Частные производные правых частей $G_i(x,\psi)$, $(i = 1,\ldots,4)$ системы (8) находятся по формулам, в которых все выражения вычисляются в стационарной точке x^*:

$$\partial G_x^1 = \begin{pmatrix} f'_{x_1} & f'_{x_2} \\ bf'_{x_1} & bf'_{x_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta+\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \partial G_\psi^1 = \begin{pmatrix} \psi_1^* & 0 \\ 0 & \psi_2^* \end{pmatrix}^{-2}, \quad \partial G_\psi^2 = -\left(\partial G_x^1\right)^T + \rho E_2,$$

$$\partial G_x^2 = -\frac{1}{f^2(x^*)}\begin{pmatrix} \left(f'_{x_1}\right)^2 & f'_{x_1}f'_{x_2} \\ f'_{x_1}f'_{x_2} & \left(f'_{x_2}\right)^2 \end{pmatrix} - \left(\psi_1^* + b\psi_2^* - \frac{1}{f(x^*)}\right)\begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(x^*) & f''_{x_1x_2}(x^*) \\ f''_{x_1x_2}(x^*) & f''_{x_2^2}(x^*) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Якобиан (11) обладает рядом свойств, позволяющих оценить его собственные значения. Для описания этих свойств потребуется понятие гамильтоновой матрицы.

Определение 1. Рассмотрим блочную квадратную матрицу $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$. Матрица M называется *гамильтоновой*, если ее блоки M_{12} и M_{21} являются симметрическими матрицами и выполнено равенство $M_{11} + M_{22}^T = \mathcal{O}_n$, где $\mathcal{O}_n$ — нулевая матрица порядка n.

Перечислим наиболее значимые свойства гамильтоновых матриц.
PH1. *Характеристический многочлен гамильтоновой матрицы M является четной функцией.*

Доказательство. Для любой гамильтоновой матрицы M справедливо равенство, легко проверяемое непосредственным умножением[1], $\begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & E_n \\ -E_n & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} M^T \begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & -E_n \\ E_n & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} = -M$, при помощи которого получим требуемое: $\det(M-\lambda E_{2n}) = (-1)^{2n}\det\left[\begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & E_n \\ -E_n & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} M^T \begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & -E_n \\ E_n & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} + \lambda E_{2n}\right] = \det\left(M^T + \lambda E_{2n}\right) = \det\left(M + \lambda E_{2n}\right)$. □

PH2. *Собственные значения гамильтоновой матрицы M симметричны относительно мнимой оси.*[2]

[1] Здесь и далее E_n — единичная матрица порядка n.
[2] Является следствием Свойства PH1.

PH3. *Если блоки M_{12} и M_{21} – положительно-определенные матрицы, то гамильтонова матрица M не имеет чисто мнимых собственных значений* (см. [5]).
PH4. *Если блоки M_{12} и M_{21} – положительно-определенные матрицы, то определитель гамильтоновой матрицы M отвечает неравенству* (см. [11])

$$(-1)^n \det M \geqslant \det M_{12} \det M_{21} > 0.$$

Используя понятие гамильтоновой матрицы, исследуем якобиан J (10)-(11) исходной задачи управления.

Утверждение 2 (PJ1)**.** *Якобиан* (10), (11) *гамильтоновой системы* (8) *представим в виде суммы гамильтоновой и диагональной матриц $J = M + \rho/2E_4$.*

Доказательство. В силу формул (11), определяющих блоки якобиана, имеем

$$M_{11} = \partial G^1_x - \frac{\rho}{2}, \quad M_{12} = \partial G^1_\psi, \quad M_{21} = \partial G^2_x, \quad M_{22} = -\big(\partial G^1_x\big)^T + \frac{\rho}{2} = -M^T_{11}. \tag{12}$$

Откуда следует, что матрица Якоби представима в виде $J = M + \rho/2E_4$. □

Утверждение 3 (PJ2)**.** *Собственные числа Якобиана и гамильтоновой матрицы M связаны равенством $\lambda_J = \lambda_M + \rho/2$.*

Доказательство. В силу свойства PJ1 характеристический многочлен якобиана можно записать

$$\det (J - \lambda_J E) = \det \Big(M + \frac{\rho}{2}E - \lambda_J E\Big) = \det \Big(M - \Big(\lambda_J E - \frac{\rho}{2}E\Big)\Big) = \det (M - \lambda_M E).$$

Следовательно, справедливо равенство $\lambda_M = \lambda_J - \rho/2$, которое доказывает свойство. □

Утверждение 4 (PJ3)**.** *Гамильтонова матрица M* (12) *не имеет чисто мнимых собственных значений.*

Доказательство. Опираясь на свойство PH3, необходимо обосновать положительную определенность подматриц M_{12} и M_{21}. Матрица M_{12} положительно определена, так как является диагональной, с положительными элементами на своей диагонали.

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1/(\psi^*_1)^2 & 0 \\ 0 & 1/(\psi^*_2)^2 \end{pmatrix} > 0.$$

Положительная определенность матрицы M_{21} следует из свойств P3 и P4 максимизированного гамильтониана. В силу того, что $H(x, \psi)$ есть гладкая и строго вогнутая функция по векторной переменной $x = (x_1, x_2)$, а также формул (6) имеем

$$M_{21} = \partial G^2_x = \begin{pmatrix} \left(\rho\psi_1 - \dfrac{\partial H(x^*,\psi^*)}{\partial x_1}\right)'_{x_1} & \left(\rho\psi_1 - \dfrac{\partial H(x^*,\psi^*)}{\partial x_1}\right)'_{x_2} \\ \left(\rho\psi_2 - \dfrac{\partial H(x^*,\psi^*)}{\partial x_2}\right)'_{x_1} & \left(\rho\psi_2 - \dfrac{\partial H(x^*,\psi^*)}{\partial x_2}\right)'_{x_2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H(x^*,\psi^*)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 H(x^*,\psi^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 H(x^*,\psi^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 H(x^*,\psi^*)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица положительно определенная, так как является отрицательным гессианом максимизированного гамильтониана, который, в свою очередь, в силу вогнутости функции $H(x, \psi)$ по векторной переменной x отрицательно определен. Таким образом, свойство доказано. □

На основе вышеперечисленных утверждений, можно сформулировать теорему.

Теорема 2. *Характеристический многочлен* $\det(J - \lambda E_4) = 0$ *матрицы Якоби (10), вычисленный в стационарной точке, заменой $\tau = (\lambda - \rho/2)^2$ приводится к виду*

$$\tau^2 + a_2\tau + a_4 = 0, \quad a_2 = -\frac{\mathrm{trM}^2}{2} < 0, \quad a_4 = \frac{1}{4}(2a_2^2 - \mathrm{trM}^4) = \det \mathrm{M} > 0. \tag{13}$$

Более того, если дискриминант уравнения (13) *неотрицателен, то есть $a_2^2 \geqslant 4a_4$, то оба корня τ_1 и τ_2 будут положительны и характеристические числа якобиана найдутся из соотношений*

$$\lambda_{1,2} = -\sqrt{\tau_{1,2}} + \rho/2, \quad \lambda_{3,4} = \sqrt{\tau_{1,2}} + \rho/2.$$

Если дискриминант уравнения (13) *отрицателен* ($a_2^2 < 4a_4$), *то корни этого уравнения представимы в виде* $\tau_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ *и собственные числа матрицы Якоби отвечают формулам*

$$\lambda_{1,2,3,4} = \sqrt{r}\left(\pm\cos\frac{\varphi}{2} \pm i\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\rho}{2}, \quad r = \sqrt{a_4}, \quad \varphi = \arctan\sqrt{\frac{4a_4}{a_2^2} - 1}.$$

Замечание. Напомним, что условия существования нелинейного регулятора [8, 9, 10] требуют, чтобы ровно половина действительных частей собственных чисел якобиана была отрицательна, а другая половина — положительна. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения (13) удовлетворяли неравенству $\quad \mathrm{Re}(\tau_{1,2}) > \rho^2/4$.

Аналитически проверить выполнение указанного условия не удается ввиду большого количества параметров модели. Поэтому в следующем разделе приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающих выполнение этого условия, что гарантирует (для исследуемого диапазона параметров эластичности производственной функции Кобба–Дугласа и величин ρ, b) существование нелинейного регулятора.

4.2 Численные эксперименты

Численный анализ чувствительности типа стационарной точки к изменениям параметров модели был проведен для производственной функции Кобба–Дугласа $y = f(x_1, x_2) = \mu x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $\quad \mu > 0, \quad \alpha, \beta \in (0, 1)$, которая удовлетворяет всем требованиям PF1 и PF2. Для выполнения условий P1 — P4 коэффициенты эластичности должны лежать в интервалах $0 < \alpha < 0.5, \quad 0 < \beta < 0.5, \quad 0 < \alpha + \beta < 0.5$. Стационарная точка (x^*, ψ^*) гамильтоновой системы (8) с производственной функцией Кобба–Дугласа может быть найдена аналитически [12].

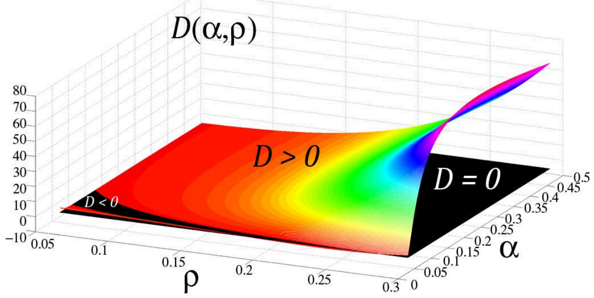

Рис. 1. Дискриминант D как функция параметров α и ρ

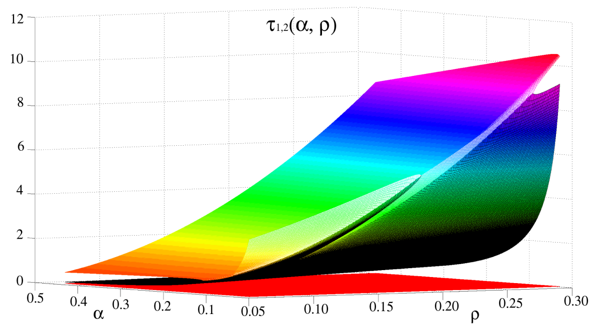

Рис. 2. Корни $\tau_{1,2}$ как функции параметров α и ρ

Для определения типа стационарной точки достаточно исследовать знак дискриминанта $D(\cdot)$, который в силу (13) записывается в виде $D(\cdot) = a_2^2(\cdot) - 4a_4(\cdot)$, и сравнить действительные части корней (13) с $\rho^2/4$.

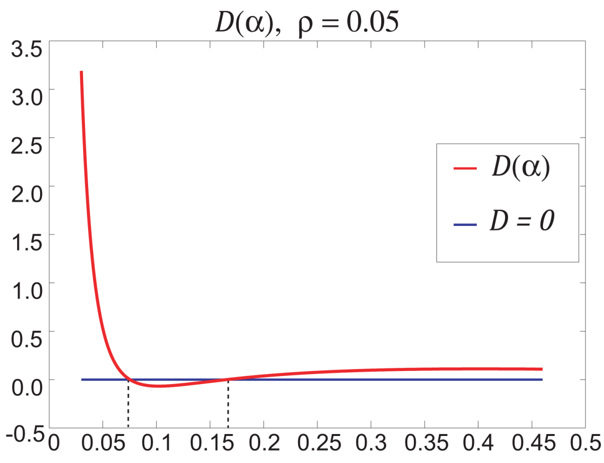

Рис. 3. Зависимость дискриминанта D от параметра α при $\rho = 0.05$

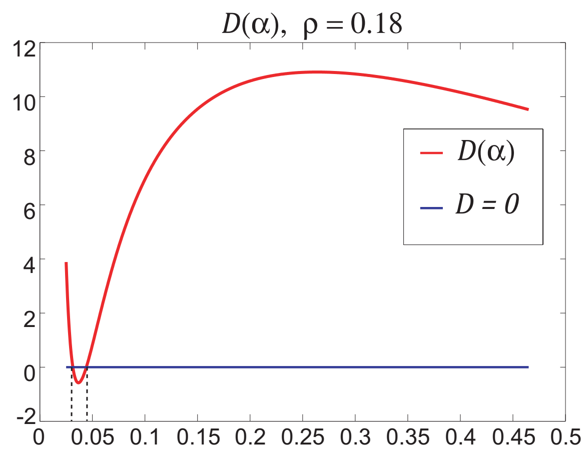

Рис. 4. Зависимость дискриминанта D от параметра α при $\rho = 0.18$

На рисунках графически изображены поверхности, отвечающие дискриминанту $D(\cdot)$ многочлена (13) и действительным значениям его корней как функций от параметров модели ρ, b и α.

Графики дискриминанта D как функции переменных α и ρ (рис. 1, 3, 4) показывают, что для достаточно широкого спектра значений параметров величина $D(\alpha, \rho)$ остается положительной, что влечет седловой характер равновесия. Однако есть область (располагающаяся ниже уровня $D = 0$, отмеченной черным цветом на рис. 1), в которой дискриминант отрицателен, что свидетельствует о наличии критических значений параметров, когда стационарная точка становится типа фокус. Как видно из рис. 3 и 4, дискриминант будет отрицателен при $\rho = 0.05$ и $\alpha \in (0.075; 0.165)$ или при $\alpha \in (0.03; 0.045)$ для $\rho = 0.18$.

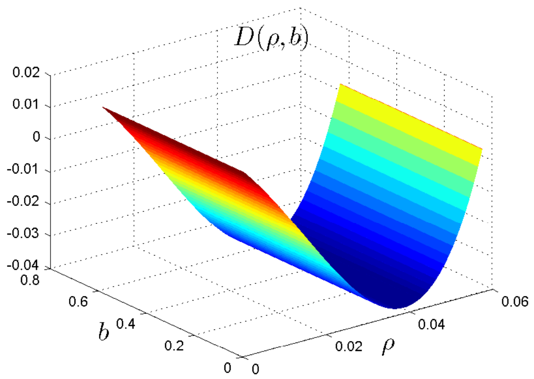

Рис. 5. Зависимость дискриминанта D от параметров ρ и b при $0 < \rho \leqslant 0.06$

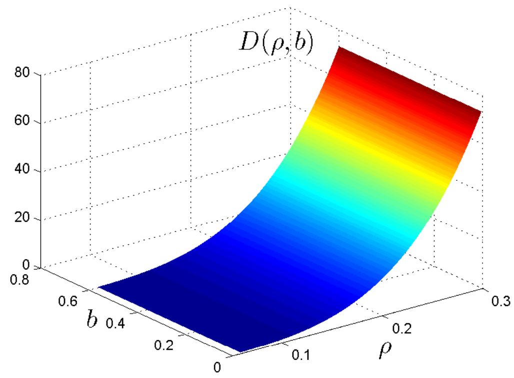

Рис. 6. Зависимость дискриминанта D от параметров ρ и b при $\rho > 0.06$

Аналогичный анализ был проведен для пары параметров (b, ρ). Из графиков (рис. 5, 6) видно, что параметр b не оказывает влияния на знак дискриминанта. Значения параметра дисконтирования ρ, лежащие в диапазоне (0.015, 0.06), приводят к отрицательному дискриминанту, а при больших значениях параметра ρ ($\rho > 0.06$) дискриминант будет положителен.

Важно отметить, что при любых значениях параметров α, b, ρ действительная часть корней уравнения (13) превосходит величину $\rho^2/4$ (рис. 2, 7, 8). Это гарантирует выполнение условий существования нелинейного регулятора [8, 9, 10].

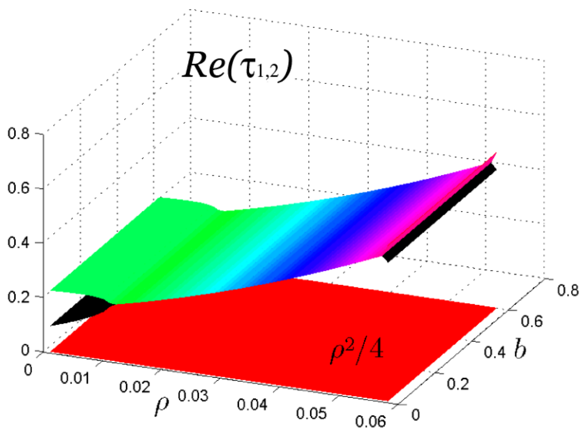

Рис. 7. Корни $\tau_{1,2}(\rho, b)$ при $0 < \rho \leqslant 0.06$

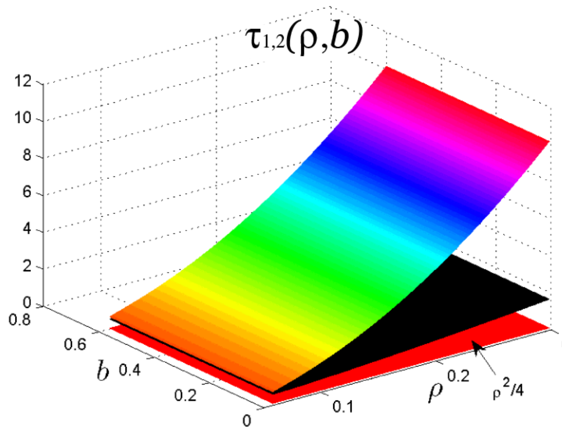

Рис. 8. Корни $\tau_{1,2}(\rho, b)$ при $\rho > 0.06$

5 Заключение

В работе рассмотрены свойства матрицы Якоби гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления, основанной на двухсекторной модели экономического роста. Показано, что для задач рассматриваемого типа якобиан обладает рядом свойств, позволяющих понизить порядок характеристического многочлена в два раза. Проведенный анализ дает возможность численно оценить критические значения параметров модели, при которых качественное поведение оптимальных траекторий меняется, в частности, могут появляться циклы, когда дискриминант характеристического уравнения становится отрицательным. Численные эксперименты также обосновывают существование нелинейного регулятора, стабилизирующего гамильтонову систему вблизи установившегося состояния, для достаточно широкого спектра параметров модели.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-10018).

Список литературы

[1] S.M. Aseev, A.V. Kryazhimskiy. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems Pontryagin's maximum principle and optimal economic growth problems. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 257(1):1–255, 2007. = С.М. Асеев, А. В. Кряжимский. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. *Тр. МИАН*, М.: Наука, 257:3—271, 2007.

[2] R.U. Ayres, B. Warr. The Economic Growth Engine: How Energy and Work Drive Material Prosperity. *Edward Elgar Publishing*, Cheltenham UK, 2009.

[3] E.J. Balder. An existence result for optimal economic growth problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 95:195–2013, 1983.

[4] A. Krasovskii, A. Tarasyev. Conjugation of Hamiltonian Systems in Optimal Control Problems. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, COEX, South Korea, 17(1):7784–7789, 2008.

[5] C. Paige, C. van Loan. A Schur decomposition for Hamiltonian matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 41:11–32, 1981.

[6] L.S. Pontryagin. Ordinary differential equations. *Addison-Wesley; Pergamon*, 1962. = Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. *М.: Наука*, 1974.

[7] W.C. Sanderson. The SEDIM Model: Version 0.1. IIASA Interim Report IR–04–041, 2009.

[8] A.M. Tarasyev, A.A. Usova. Construction of a regulator for the Hamiltonian system in a two-sector economic growth model. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 271(1):265–285, 2010. = А.М. Тарасьев, А.А. Усова. Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста. *Тр. МИАН*, 271:278–298, 2010.

[9] A.M. Tarasyev, A.A. Usova. Stabilizing the Hamiltonian system for constructing optimal trajectories. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 277(1):248–265, 2012. = А.М. Тарасьев, А.А. Усова. Стабилизация гамильтоновой системы для построения оптимальных траекторий. *Тр. МИАН*, 277:257–274, 2012.

[10] A.M. Tarasyev, A.A. Usova. The sensitivity of the phase portrait of Hamiltonian systems for the growth of resource economy model. *Proc. of the Int. conf.* "Systems dynamics and control processes", IMM UbRAS, 317–324, 2015 (in Russian). = А.М. Тарасьев, А.А. Усова. Чувствительность фазовых портретов гамильтоновых систем для модели роста ресурсозависимой экономики Труды междунар. конф. к 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского «Динамика систем и процессы управления», ИММ УрО РАН, 317–324, 2015.

[11] A.M. Tarasyev, A.A. Usova. Structure of the Jacobian in economic growth models. *Proceedings of the 16th IFAC Workshop, CAO'2015*, Garmisch-Partenkirchen, Germany, 2015.

[12] A.A. Usova. Studying the properties of Hamiltonian systems and functions price in dynamic models of growth. Candidate's thesis, 2012 (in Russian). = А.А. Усова. Изучение свойств гамильтоновых систем и функций цены в динамических моделях роста. Диссертация на соискание степени кандидата физ.-мат. наук, 2012.

Sensitivity of the qualitative behavior of the Hamiltonian trajectories with respect to growth model parameters

Olga V. Russkikh[2], *Anastasya A. Usova*[1], *Aleksandr M. Tarasyev*[1]
1 – Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)
2 – Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: optimal control problem, sensitivity analysis, growth models, Hamiltonian trajectories.

The paper is devoted to analysis of the qualitative behavior of optimal solutions in control problems with infinite time interval. The optimal control problem is based on the two-sector economic growth model. Sensitivity of the optimal trajectories with respect to the model parameters is analyzed. In particular, the case of the production function parameters and the discount factor is considered. It is shown that, for the wide range of admissible values of model parameters, the Hamiltonian dynamics has the steady state with the type of saddle or focus. Moreover, a half of eigenvalues has negative real parts, and another half of eigenvalues has strictly positive real parts. This fact confirms the existence of the nonlinear regulator stabilizing the Hamiltonian dynamics at the steady state neighborhood. Stabilized solutions of the Hamiltonian system approximate optimal trajectories in a vicinity of the equilibrium with the quadratic accuracy.