

Function Studium: um software para o desenvolvimento do raciocínio covariacional

César Thiago José da Silva, Ricardo Tibúrcio dos Santos, Franck Gilbert René Bellemain, Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Universidade Federal de Pernambuco

{cesarthiago.silva; rico.tiburcio; f.bellemain;
veronica.gitirana}@gmail.com

Abstract. *This paper presents the Function Studium, a software to dynamic address functions, emphasizing its rate of change and the development of the covariational reasoning. The Function Studium was developed in the research group LEMATEC at Universidade Federal de Pernambuco, and it is for students from High School to Undergraduate, in Mathematics disciplines that address functions and its rate of change, such as calculus.*

Resumo. *Este artigo apresenta o Function Studium, um software para abordar funções de forma dinâmica, com ênfase na sua taxa de variação e no desenvolvimento do raciocínio covariacional. O Function Studium foi desenvolvido no Grupo de Pesquisas LEMATEC da Universidade Federal de Pernambuco, e é destinado a estudantes do Ensino Médio ao Superior, nas disciplinas de Matemática que abordem funções e sua taxa de variação, como cálculo.*

1. Introdução

Este artigo apresenta um software para o estudo de funções que valoriza o raciocínio covariacional, desenvolvido no âmbito do grupo de pesquisa LEMATEC (Laboratório de Ensino de Matemática e Tecnologia) da Universidade Federal de Pernambuco, como parte de duas dissertações de mestrado: [Silva 2016] e [Tibúrcio 2016].

Neste texto, com base em uma revisão da literatura, discutimos aspectos sobre o ensino de funções e os softwares para o estudo de funções, para traçar as justificativas pedagógicas da proposta. O software tem aplicabilidade em diferentes disciplinas em níveis diversos, os quais apresentamos em seguida. Segue-se uma discussão da Engenharia Didático-Informática, desenvolvida em paralelo ao desenvolvimento do software e que deu suporte ao seu desenvolvimento.

2. Justificativa Pedagógica

A justificativa pedagógica para o desenvolvimento do *Function Studium* parte, por um lado, da problemática da fundamentação teórico-metodológica da concepção e do desenvolvimento de softwares educativos e, por outro, do problema da concepção de um software que atendesse às necessidades do ensino-aprendizagem do conceito de taxa de

variação das funções, com ênfase no raciocínio covariacional dos estudantes, ou seja, na coordenação da variação conjunta das variáveis da função [Carlson et al 2002].

O conceito de taxa de variação assume um papel central no estudo das funções reais sob uma perspectiva variacional, sendo estudado desde o Ensino Básico até o Ensino Superior, onde é a base para o conceito da derivada de uma função. Também ganha mais importância sob o ponto de vista da covariação, pois ao invés da ênfase na correspondência entre valores, há um foco maior em como as variáveis da função variam uma em relação à outra e como tal relação se expressa pela taxa de variação.

Estudos relacionados à abordagem de funções por tecnologias computacionais têm apontado o potencial que essas ferramentas têm para contribuir com o ensino e aprendizagem desse conceito, como exemplo desses estudos temos [Gomes Ferreira 1997], [Villa-Ochoa 2011] e [Castro Filho 2001]. No entanto, ao se pensar na concepção de um software para a taxa de variação das funções, as especificidades do seu ensino e aprendizagem precisam ser consideradas. Tal software deve atender as necessidades relacionadas a aspectos do seu ensino, das dificuldades dos estudantes, da sua epistemologia e em como a tecnologia computacional contribui para tais aspectos.

Dessa forma, a concepção e o desenvolvimento do *Function Studium* foi orientado por um Modelo de Processo de Software baseado no quadro teórico-metodológico da Engenharia Didático-Informática, referenciado em [Bellemain, Ramos e dos Santos 2015], [Tibúrcio 2016] e [Bellemain e Tibúrcio 2016], com o objetivo de aliar em uma ferramenta computacional as especificidades do conceito de taxa de variação das funções em uma perspectiva covariacional.

3. Disciplina e contexto de utilização

No Ensino Básico, o software pode ser utilizado na disciplina de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, no conteúdo de Funções e conceitos correlatos. Já no Ensino Superior, a aplicabilidade do software pode ser considerada para diversas disciplinas das Ciências Exatas, principalmente, quando abordarem o conceito de funções reais, taxa de variação ou as noções iniciais da derivada, o que geralmente ocorre nas disciplinas ligadas a Cálculo.

4. Público alvo

Estudantes do Ensino Médio, Estudantes de Licenciatura em Matemática e de disciplinas de Cálculo no Ensino Superior.

5. Processo de desenvolvimento adotado

Para o desenvolvimento do *Function Studium*, utilizamos uma metodologia que integra princípios teórico-metodológicos da Didática da Matemática à Engenharia de Software, por meio da integração das primeiras etapas da Engenharia Didática [Artigue 1996] à Engenharia de Software. O Processo de Desenvolvimento de Softwares Educativos observa os métodos da engenharia de requisitos na Engenharia de Softwares integrados

com uma Engenharia Didática, podendo ser definida como uma Engenharia Didático-Informática, na qual contemplamos especificamente as potencialidades teóricas (do ensino e aprendizagem de conhecimentos) e tecnológicas (da computação).

As etapas da Engenharia Didático-Informática compuseram-se essencialmente de quatro fases: *delimitação do campo*, *fase teórica*, *fase experimental* e *análise a posteriori/validação*. A fase de delimitação do campo teve por objetivo selecionar os conhecimentos que o software iria abordar, ou seja, procurou-se responder os seguintes questionamentos: quais conhecimentos matemáticos serão abordados com o software? Quais são os conhecimentos relacionados que também devem ser trabalhados? Quais profissionais podem auxiliar nesse desenvolvimento? [Bellemain e Tibúrcio 2016].

Na fase teórica realizou-se uma pesquisa inicial direcionada a conhecer os encaminhamentos didáticos, epistemológicos, cognitivos e tecnológicos do conhecimento delimitado: realizou-se um apanhado teórico sobre o campo para dar início ao processo de levantamento de requisitos. Ao ser concluído o levantamento teórico, os primeiros requisitos puderam ser descritos. Ainda na fase teórica, iniciou-se a prototipação, na qual, durante o desenvolvimento do protótipo, foram delimitadas as situações de uso, os problemas que poderiam surgir com a utilização do software e as hipóteses de respostas dos usuários, por meio da análise a priori.

A fase experimental foi composta de momentos específicos para os testes e da análise do software: interface, comandos, botões, etc, juntamente com a verificação do atendimento aos objetivos de ensino e aprendizagem. A experimentação do software foi realizada com estudantes da Licenciatura em Matemática da UFPE, que utilizaram o *Function Studium* para resolver duas atividades sobre a taxa de variação.

Na fase de análise a posteriori e validação, houve o confronto das hipóteses estabelecidas na análise a priori com o que ocorreu na experimentação, a fim de avaliar o software quanto aos objetivos relacionados ao ensino e aprendizagem do conceito abordado, e que além disso, trouxe elementos de análise que contribuíram para o aprimoramento do produto.

6. Tecnologias utilizadas

O software foi desenvolvido para plataforma web, utilizando as linguagens HTML (HTML5), CSS e JAVASCRIPT. Essas linguagens, sendo interpretadas por padrão por qualquer browser, podem ser editadas com um simples tratamento de texto e beneficiam-se de inúmeras bibliotecas de objetos permitindo encurtar o tempo de desenvolvimento e de se dedicar, quase exclusivamente, na implementação do código dos artefatos que diz respeito à transposição didática-informática do conceito de função e de taxa de variação e à proposta didática de ensino desses conceitos.

A escolha de uma prototipagem para plataforma web facilitou também a distribuição do artefato para os diversos envolvidos no projeto e favoreceu as reconfigurações no processo de engenharia de software educativo, entre a engenharia de software empregada para a concepção/desenvolvimento técnica do artefato e a

engenharia de requisitos que fundamenta e norteia essa concepção/desenvolvimento. O emprego de métodos ágeis, que favorecem uma forte e rápida interação entre os diversos profissionais envolvidos no projeto, foi facilitada pela escolha de desenvolvimento web.

7. Apresentação do software

O *Function Studium* apresenta-se em uma janela principal (Figura 1) cercada de ícones que representam ferramentas ou opções do software, além de outras janelas secundárias, nas quais outras representações de função como a tabular e o modelo algébrico foram implementadas para interagir com o gráfico.

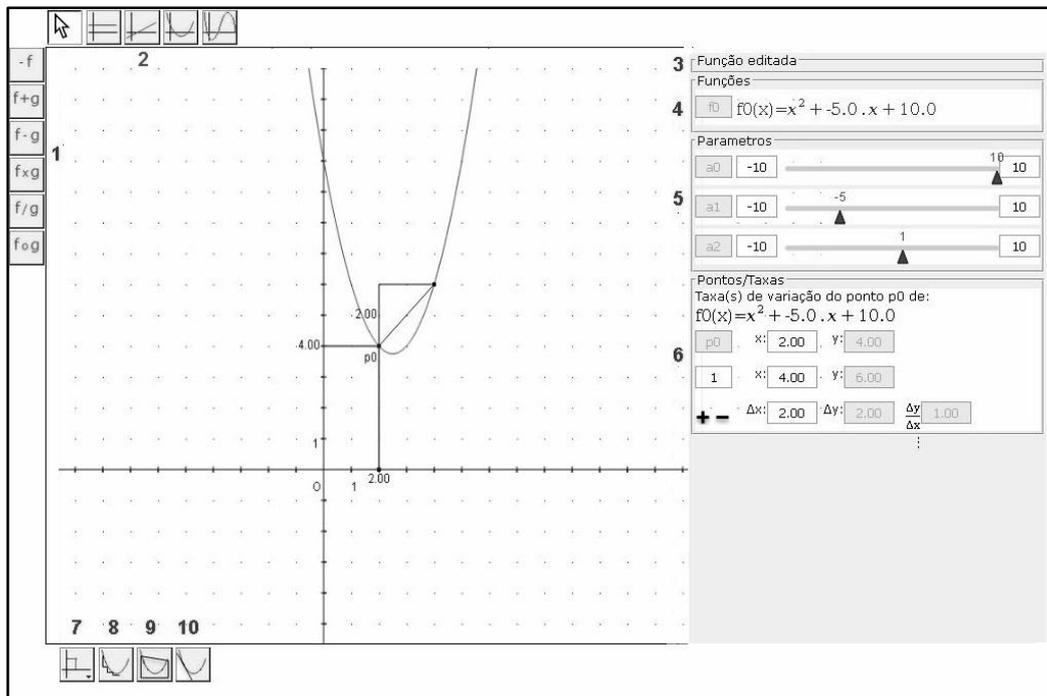


Figura 1. Tela do *Function Studium*

Na área indicada com o número 1, estão as ferramentas de operações com funções, nas quais, dadas duas funções pré-definidas, é possível obter uma terceira função pela operação entre elas. Partiu-se de uma álgebra das funções tomadas como básicas. Na área indicada com o número 2 estão os tipos de função, que são a constante, afim, quadrática e polinomial de grau 3. Outras funções polinomiais podem ser obtidas como resultado da operação com estas funções, assim como as funções racionais.

Na área indicada com o número 3, a janela “Função editada” exhibe o modelo algébrico da função. Nesta janela é possível definir os coeficientes da função por meio de controles deslizantes. Na área 4, a janela “Funções” exhibe o modelo algébrico das funções definidas, já na 5 a janela “Parâmetros” exhibe os coeficientes das funções definidas e permite alterá-los dinamicamente por meio dos controles deslizantes.

Na área 6, a janela “Pontos/Taxas” exibe os valores das variáveis, da sua variação e da taxa de variação das funções nos valores selecionados. É possível definir tais valores tanto diretamente nessa janela como selecionando-os no gráfico.

Em 7 encontra-se a opção de definir um ponto no gráfico e em 8, a ferramenta “Taxa de variação”, que ao ser acionada permite calcular a taxa de variação tanto entre dois pontos do gráfico quanto entre pontos associados a intervalos sucessivos de x , como mostra mais adiante a Figura 2. As áreas indicadas em 9 e 10 referem-se às ferramentas “Reta secante” e “Reta tangente”, nas quais é possível definir retas tangentes ou secantes ao gráfico da função, para articular essas retas com a taxa de variação da função, contextualizando este conceito com o seu significado geométrico.

7.1 Possibilidades de uso no ensino e aprendizagem de funções

O processo de desenvolvimento do *Function Studium* foi orientado para uma perspectiva variacional de função, com ênfase no conceito de taxa de variação, além disso, também teve como objetivo oferecer suporte ao desenvolvimento do raciocínio covariacional. Dessa forma, as possibilidades de uso do software são direcionadas para abordagens que tenham como objetivo desenvolver nos estudantes uma compreensão variacional de função e dos seus aspectos. São alguns exemplos:

- a) Suporte à caracterização variacional das funções afim e quadrática: A função afim é caracterizada variacionalmente como uma função real que possui taxa de variação constante para todo o x do seu domínio. Já a função quadrática possui uma taxa de variação variável em função de x , porém a sua variação é constante. Estes dois casos podem ser abordados no *Function Studium* pela ferramenta “Taxa de variação”, que exibe valores da variação da taxa de variação, conforme a Figura 2.
- b) Suporte à análise dinâmica da influência dos coeficientes no gráfico: A variação dos coeficientes no modelo algébrico da função, de forma dinâmica e conectada ao gráfico, é um importante recurso para analisar como tal variação influencia o comportamento do gráfico. Esta abordagem é possível no *Function Studium*, por meio dos controles deslizantes na janela “Parâmetros”.
- c) Suporte à interpretação da taxa de variação geometricamente: A implementação das ferramentas “Reta tangente” e “Reta secante” levou em conta os resultados das Análises Preliminares [Silva 2016], que indicaram a necessidade de interpretar a taxa de variação no contexto geométrico. Assim, situações que tenham por objetivo realizar tal contextualização são possíveis no software.
- d) Suporte à interpretação da taxa de variação nos aspectos do gráfico: A conexão entre o gráfico e a janela “Pontos/Taxas”, possibilita a criação de situações que tenham por objetivo interpretar o comportamento da taxa de variação em relação a aspectos do gráfico, como concavidades e pontos críticos ou de inflexão.
- e) Simulação dinâmica da derivada no ponto: Situações que tenham por objetivo

abordar a derivada, são possíveis por meio de sua simulação dinâmica, que utiliza a ferramenta “Taxa de variação”. Escolhendo-se um valor para delta x suficientemente pequeno, ao variar-se o valor de x no gráfico, é exibido o valor da derivada simultaneamente.

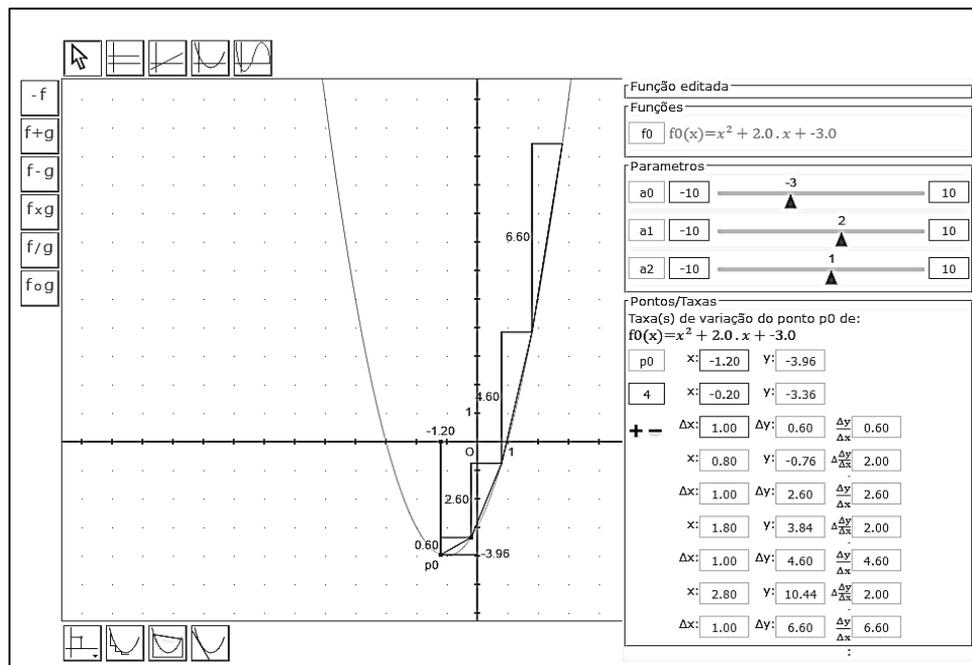


Figura 2. O *Function Studium* na caracterização variacional da função quadrática

8. Resultados e impactos esperados no ensino e aprendizagem de funções

Os resultados e impactos esperados com o uso do software, relacionam-se diretamente com os princípios que guiaram a sua concepção, pois as ferramentas implementadas no *Function Studium* são resultados dos princípios e necessidades determinados como requisitos para o software. São apontados alguns desses resultados: (i) **Suporte ao desenvolvimento do raciocínio covariacional dos estudantes**: de acordo com Carlson et al (2002), as tecnologias computacionais podem fornecer ferramentas valiosas para o raciocínio covariacional dos estudantes na análise e interpretação de situações dinâmicas de funções. Tais ferramentas são importantes para uma maior abordagem da perspectiva covariacional no ensino de funções, por isso, espera-se que o *Function Studium* promova o desenvolvimento do raciocínio covariacional. (ii) **Promover a aprendizagem de funções por meio de um ambiente dinâmico e multi-representacional**: por ser um software dinâmico e que aborda funções por múltiplas representações, é esperado que o *Function Studium* seja uma ferramenta importante para o aprendizado deste conceito pelos estudantes. Segundo Kaput (1992) a mídia dinâmica é “a casa natural das variáveis”, o que torna esse tipo de ambiente um meio rico para abordar funções. (iii) **Suporte à aprendizagem do conceito de taxa de variação**: o *Function Studium* é um software concebido com ênfase no conceito da taxa de variação

das funções, levando em consideração seus aspectos epistemológicos, didáticos, as dificuldades dos estudantes com o conceito e como a tecnologia computacional pode contribuir para promover o aprendizado a partir desses aspectos. Dessa forma, espera-se que o software ofereça um importante suporte para a aprendizagem do conceito de taxa de variação.

Referências

- Artigue, M. (1996) “Engenharia Didática”. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, Cap 4, 193-217.
- Bellemain, F. & Tiburcio, R. (2016) Processo de desenvolvimento de software educativo: análise teórica e experimental com recurso a teoria da orquestração instrumental. In: 1º Simpósio Latino-Americano de didática da Matemática, Bonito - MS. LADIMA.
- Bellemain, F. G. R., Ramos, C. S. & dos Santos, R. T. (2015) “Engenharia de Softwares Educativos, o caso do Bingo dos Racionais.” In: VI SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis. Anais do VI SIPEM, Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v.1, 1-12.
- Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). “Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Castro Filho, J. A. (2001) “Novas Tecnologias e o ensino de função, taxa de variação e acumulação”. In: VII Encontro Nacional de Educação Matemática - VII Enem, 2001, Rio de Janeiro, Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática.
- Cillsilva. (2017, Março 07). *Vídeo demonstrativo _ CTRL E 2017*. [Arquivo de vídeo]. Acessado na URL <https://youtu.be/dEBB6k4MhIg>
- Gomes Ferreira, V. G. (1997) “Exploring Mathematical Functions through dynamic microworlds”. Tese de Doutorado, Institute of Education (University of London)
- Kaput, J. (1992) “Technology and Mathematics Education.” In: D.A. Grows (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 515-556, New York.
- Silva, C. T. J. (2016) “A Engenharia Didático-Informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação”. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife.
- Tiburcio, R. S. (2016) “Processo de Desenvolvimento de Software Educativo: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função.” Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife.
- Villa-Ochoa, J. A. (2011) “Raciocínio ‘covariacional’: O caso da função quadrática”. Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, Comitê Interamericano de Educação Matemática.