Das generalisierte Positionsspektrum der Zirkulartransformationen

Volker Lohweg und Dietmar Müller*

Linnenstr. 35, 33699 Bielefeld
Email: v.lohweg@owl-online.de
*Professur Schaltungs- und Systementwurf
Technische Universität Chemnitz, 09107 Chemnitz

Zusammenfassung. Basierend auf der Klasse der Zirkulartransformationen wird ein generalisiertes Positionsspektrum vorgestellt. Die Berechnung des Positionsspektrums kann für alle Transformationen auf ein einheitliches Gerüst aufgebaut werden. Im Unterschied zu anderen in der Literatur bekannten Berechnungsstrategien kann die algorithmische Struktur *unabhängig* von einer Transformation der o.g. Klasse beibehalten werden. Mit Hilfe von schwach kommutativen Abbildungen kann ein datenreduziertes Positionsspektrum bestimmt werden, das eine Positionsunterscheidung in jedem Fall zulässt. Dieser Ansatz beruht letztendlich auf einer Interpretation des Positionsvektors im Sinne einer Klassentrennbarkeit von Positionen als Merkmal.

Schlüsselwörter: Positionsspektrum, Zirkulartransformationen, schwach kommutative Abbildungen

1 Einleitung

Nichtlineare ein- und zweidimensionale Spektraltransformationen sind eingeführte Werkzeuge in der Bildverarbeitung und Mustererkennung. Es sind verschiedene Transformationen bekannt, deren translationsinvariante Spektren (mit Berücksichtigung auf ihre Trenneigenschaften), zu einer Merkmalgewinnung herangezogen werden können. Oft wird jedoch neben invarianten Merkmalen auch die *Position* eines Objekts benötigt, das mit den Referenzmerkmalen übereinstimmt. Hierzu ist ein aus den Merkmalen zu bestimmtes Positionsspektrum nötig. Dieses sollte die Eigenschaft besitzen, unabhängig von einer Klasse von Transformationen gebildet werden zu können. Motiviert durch den effektiven Einsatz einfacher Spektraltransformationen wurde von Lohweg und Müller ein Ansatz zur einfachen Bestimmung von translationsinvarianten Spektralkoeffizienten mittels sogenannter zirkularer Transformationen vorgeschlagen [1]. Es handelt sich um Transformationen mit Radix-2-Struktur, die eine schnelle Berechnung translationsinvarianter Merkmale mit einem rechentechnischen Aufwand von $\boldsymbol{O}(N)$ bis $\boldsymbol{O}(N\mathrm{ld}(N))$ erlauben (N ist die Länge eines Dateneingangsvektors). Die Klasse der Transformationen wurde auf ein einheitliches Konzept zurückgeführt. Dieses basiert auf sogenannten

charakteristischen und *zirkularen* Matrizen. Die Transformationen haben alle eine interessante Eigenschaft. Im Unterschied zu dem Leistungsspektrum der WHT wurde ein *Betragsspektrum G* mit ld(N)+1 Koeffizienten definiert, welches mit absoluten Beträgen operiert und invariant bezüglich zyklischer Verschiebungen eines Eingangsvektors ist [1]. Diese Eigenschaft ist von der WHT und generalisierten Transformationen (GT, bzw. MGT) [2] nicht bekannt. Es ist eine interessante Tatsache, dass auch die modifizierte Walsh-Hadamard-Transformation (MWHT) [2] und auch eine vom Pender und Covey vorgeschlagene *Square Wave Transform* (SWT) [3] ebenfalls zu der Klasse der Zirkulartransformationen gehören.

Für diese Klasse von Transformationen ist es möglich, ein ein- bzw. zweidimensionales *generalisiertes Positionsspektrum* zu definieren, dass mit Hilfe des Betragsspektrums *G* berechnet werden kann. Das eindimensionale Positionsspektrum besitzt hierbei *N* Koeffizienten. Der Ansatz lässt eine „schnelle" Berechnung in Radix-2-Struktur zu. Darüber hinaus ist es möglich, aus dem Positionsspektrum und dem Betragsspektrum den Originaldatenvektor zurückzugewinnen.

Auch kann aus dem Positionsspektrum ein Positionsmerkmalvektor generiert werden, der mit ld(N)+1 Einträgen (eindimensionaler Fall) operiert, sodass sich bei der Erkennung eines Objekts selbst sowie dessen Position eine deutliche Datenreduktion ergibt. Es stellt sich jedoch die Frage, ob ein derart reduzierter Positionsmerkmalverktor verschiedene Positionen unterscheiden kann? Wird ebenso für das Positionsspektrum das Konzept der sogenannten *schwach kommutativen Abbildungen* (SKA) [4,5,6,7] verwendet und das Positionsspektrum als Mermalvektor interpretiert, lässt sich auch für ein Positionsspektrum mit reduzierten Koeffizienten eine hohe Musterunterscheidbarkeit im Sinne einer Positionserkennung erreichen.

2 Grundlagen

Es werden nun Algorithmen vorgestellt, die auf einfache Weise ein generalisiertes Positionsspektrum für Zirkulartransformationen erzeugen. Die dazu genutzten Transformationen operieren mit zirkularen und charakteristischen Matrizen. Eine Herleitung der o.g. Matrizen sowie der nützlichen Eigenschaften sind in [1] erläutert. Es werden deshalb hier nur Ergebnisse vorgestellt.

2.1 Betragsspektrum G

Das translationsinvariante Spektrum *G* ist im Gegensatz zum Leistungsspektrum der DFT durch die Bildung von Periodengruppen, ähnlich dem Leistungsspektrum der WHT, definiert. Durch eine Summation der Beträge der Spektralkoeffizienten innerhalb einer Periodengruppe entsteht ein translationsinvariantes Spektrum mit ld(N)+1 Koeffizienten, die als Merkmalvektor verwendet werden. Mit Hilfe des bekannten Verfahrens der Berechnung einer Shiftmatrix ${}^{s}\boldsymbol{S}_N = \frac{1}{N} \cdot \boldsymbol{A}_N \cdot {}^{s}\boldsymbol{I}_N \cdot \boldsymbol{B}_N^T$ mit $-(N-1) \le s \le (N-1)$ [8], das zur Definition des Betragsspektrums herangezogen wurde, ist es ebenfalls möglich, ein Positionsspektrum herzuleiten.

3 Das generalisierte Positionsspektrum

Der Konzept der Ableitung eines generalisierten Positionsspektrums basiert auf einem Ansatz von Rao und Narasimhan [9]. Sie gaben ein generalisiertes Phasenspektrum für verschiedene Transformationen (u.a. WHT und DFT) an, das die Rückgewinnung des Eingangsdatenvektors zulässt. Der Grundgedanke ist hierbei, ein Positionsspektrum durch zyklische Verschiebung des Eingangsdatenvektors zu gewinnen, das durch anschließende Berechnung einer Rücktransformation den Dateneingangsvektor ergibt.

Das in diesem Beitrag vorzustellende Positionsspektrum liefert eine einheitliche Berechnungsgrundlage für die Klasse der Zirkulartransformationen. Der Ansatz beruht auf der Eigenschaft der o.g. Shiftmatrix $\boldsymbol{S}_N$ und der Matrix ${}^s\boldsymbol{I}_N$. Mit ${}^s\boldsymbol{I}_N$ wird eine (m x m)-Einheitsmatrix bezeichnet, deren Spalten um s Stellen zyklisch verschoben werden. Hierbei gilt für $s \geq 0$, dass die Spalten um s Stellen nach rechts verschoben und für $s < 0$, dass die Spalten um s Stellen nach links verschoben sind. Die Matrizen ${}^s\boldsymbol{I}_N$ und $\boldsymbol{S}_N$ können mit ${}^s\boldsymbol{I}_{\frac{N}{2}} := {}^s\boldsymbol{Ia}_{\frac{N}{2}} + {}^s\boldsymbol{Ib}_{\frac{N}{2}}$ und ${}^s\boldsymbol{Q}^T_{\frac{N}{2}} := {}^s\boldsymbol{Ia}_{\frac{N}{2}} - {}^s\boldsymbol{Ib}_{\frac{N}{2}}$ wie folgt dargestellt werden:

$$ {}^s\boldsymbol{I}_N = \begin{bmatrix} {}^s\boldsymbol{Ia}_{\frac{N}{2}} & {}^s\boldsymbol{Ib}_{\frac{N}{2}} \\ {}^s\boldsymbol{Ib}_{\frac{N}{2}} & {}^s\boldsymbol{Ia}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}, \quad {}^s\boldsymbol{S}_N = \begin{bmatrix} {}^s\boldsymbol{Q}^T_{\frac{N}{2}} & & & \boldsymbol{0} \\ & {}^s\boldsymbol{Q}^T_{\frac{N}{4}} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{1} $$

Hiermit folgt sofort ${}^s\boldsymbol{X}_p = {}^s\boldsymbol{Q}^T_{\frac{N}{2}} \cdot \boldsymbol{X}_p$ mit $p = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$und ${}^s\boldsymbol{X}_p = {}^s\boldsymbol{Q}^T_{\frac{N}{4}} \cdot \boldsymbol{X}_p$ mit $p = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \ldots, \frac{N}{2} + \frac{N}{4} - 1$, usw..

Als Maß für das Positionsspektrum der Zirkulartransformationen wird folgender Ansatz gewählt:

$$ {}^s\Phi_j := \frac{{}^s\boldsymbol{X}_p^T \tilde{\boldsymbol{R}}_p}{G_j} \quad \text{mit } \tilde{\boldsymbol{R}}_N^T := \{1, 1, ..., 1\} = \{\tilde{\boldsymbol{R}}_n^T, ..., \tilde{\boldsymbol{R}}_2^T, 1, 1\}, \tag{2} $$
$$ \tilde{\boldsymbol{R}}_2^T = \{1, 1\}, \text{ usw..} $$

Durch zeilenweise Anordnung des Ausdrucks $\left({}^s\boldsymbol{Q}_{\frac{N}{i}} \cdot \tilde{\boldsymbol{R}}_p\right)^T$ wird jeweils eine Matrix der Größe $\frac{N}{i}$ x $\frac{N}{i}$ gebildet. Der o.g. Ausdruck wird mit aufsteigendem Laufparameter s in die Zeilen einer Matrix eingeordnet. Hierdurch entsteht mittels einer zirkularen Matrix $\tilde{\boldsymbol{C}}$ [1]

$$ \varphi_{\frac{N}{i}} = \prod_{i=1}^{\mathrm{ld}(\frac{N}{i})} {}^{2^{i-1}}\tilde{\boldsymbol{C}}^T_{\frac{N}{i}} \ . \tag{3} $$

Und damit

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\frac{N}{2}} & & \mathbf{0} \\ & \varphi_{\frac{N}{4}} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} = \phi_N \,. \tag{4}$$

Durch die Normierung des Skalarprodukts mit der Diagonalmatrix

$$\Delta_N = \boldsymbol{diag}(\underbrace{G_0^{-1}, ..., G_0^{-1}}_{\frac{N}{2}-mal}, \underbrace{G_1^{-1}, ..., G_1^{-1}}_{\frac{N}{4}-mal}, ..., G_n^{-1}) \,, \tag{5}$$

usw.

erhält man das gewünschte Positionsspektrum

$${}^{*}\Phi_N = \Delta_N \cdot \phi_N \cdot \boldsymbol{X}_N = \Pi_N \cdot \boldsymbol{X}_N. \tag{6}$$

Die Bestimmung des Positionsspektrums läßt, wie bereits zuvor erwähnt, einen "schnellen" Algorithmus mit $N \cdot \mathrm{ld}(N) - 2 \cdot (N-1)$ Additionen/ Subtraktionen in ld(N) Schritten zu, da die Zirkularmatrizen nur spärlich besetzt sind. Die Anzahl der Multiplikationen mit den Komponenten des G-Spektrums beträgt N.
Die Rücktransformation des Positionsspektrums liefert die Spektralkomponenten

$$\boldsymbol{X}_N = \Delta_N^{-1} \cdot \phi_N^{-1} \cdot {}^{*}\Phi_N = \Pi_N^{-1} \cdot {}^{*}\Phi_N \,. \tag{7}$$

Für Anwendungen in der Mustererkennung werden die Transformationen in eine Signalverarbeitungskette eingebettet (Abb.1). Die Kette besteht aus einer schwach kommutativen Abbildung (SKA), der Transformation (T), dem Betragsbildungsnetzwerk (BS) und dem Positionsnetzwerk (Π). Dieses System kann *ein- oder zweidimensional* ausgeführt sein [1].

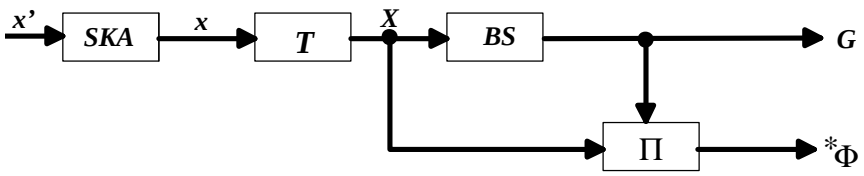

Abbildung 1. Die Signalverarbeitungskette

Werden wiederum die Positionskoeffizienten gruppenweise zusammengefasst, entsteht ein datenreduzierter Positionsvektor mit ld(N)+1 Koeffizienten. Die Zusammenfassung wurde durch Addition der Koeffizienten durchgeführt. Hierdurch kann nicht in allen Fällen eine Merkmaltrennung im Sinne einer eindeutigen Positionsunterscheidbarkeit gewährleistet werden. Mit Hilfe einer ad hoc gewählten schwach kommutativen Abbildung $x_i = x'_{i \bmod(N)} + \left| x'_{(i+1) \bmod(N)} - x'_{(i+2) \bmod(N)} \right|$, die für ein- und

zweidimensionale (zeilen- und spaltenweise) Signale eingesetzt wurde, konnten Positionen mit ld(N)+1 Positionskoeffizienten eindeutig bestimmt werden. Es wurden die in [1] untersuchten Transformationen verwendet. Das Verfahren wurde auf die Speicherung von Bildinhalten im Sinne von translationsinvarianten Merkmalen und Positionen angewendet.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Basierend auf der Klasse der Zirkulartransformationen wurde ein generalisiertes Positionsspektrum vorgestellt. Die Berechnung des Positionsspektrums kann für alle Transformationen auf ein einheitliches Gerüst aufgestellt werden. Im Unterschied zu anderen Berechnungsstrategien [2] kann die algorithmische Struktur *unabhängig* von einer Transformation der o.g. Klasse beibehalten werden. Mit Hilfe von schwach kommutativen Abbildungen kann ein datenreduziertes Positionsspektrum bestimmt werden, das eine Positionsunterscheidung in jedem Fall zulässt. Dieser Ansatz beruht letztendlich auf einer Interpretation des Positionsvektors im Sinne einer Klassentrennbarkeit von Positionen als Merkmal. Weitere Arbeiten haben zum Ziel, die vorgestellten translationsinvarianten Transformationen in einer skalierbaren Hardware-Umgebung, die prozessechtzeitfähig ist, zu implementieren. Mit Hilfe effektiver Entwurfsmethoden [10] soll die Implementierung, insbesondere von zweidimensionalen Transformationen, auf ein parametrierbares Grundgerüst aufgebaut werden.

5 Literatur

1. Lohweg V, Müller D: Anwendung schneller diskreter Spektraltransformationen zur translationsinvarianten Merkmalgewinnung, Mustererkennung 1999, 21. DAGM-Symposium, Bonn, 15. -17. Sept. 1999, pp. 266 - 275, Springer-Verlag, 1999
2. Ahmed N, Rao K R: Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing, Springer-Verlag, 1975
3. Covey D, Pender J: New Square Wave Transform for Digital Signal Processing, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 40, No. 8, pp. 2095-2097,1992
4. Fang M, Häusler G: Modified rapid transform, Applied Optics, Vol. 28, Nr. 6, 1989
5. Burkhardt H, Fenske A, Schulz-Mirbach H: Invariants for the recognition of planar contour and gray-scale images, Technisches Messen 59, Nr. 10, 1992
6. Schulz-Mirbach H: Anwendung von Invarianzprinzipien zur Merkmalgewinnung in der Mustererkennung, Dissertation, TU Hamburg-Harburg, als VDI Fortschrittsbericht, Reihe 10, 1995
7. Turan J: A novel system for 3D acoustic object recognition based on the MRT, Elektrotechniky Casopis Bratislava, Vol. 46, pp. 265-269, 1995
8. Ahmed N, Rao K R: Bifore or Hadamard-Transform, IEEE Audio Electroacoust. Trans., AU-19, pp. 225-234, 1971
9. Rao K R, Narasimhan M A: Generalized Phase Spectrum, IEEE Trans. On Acoustic, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-25, No. 1, pp. 84-89, 1977
10. Mauersberger H, Müller D: Effektive Entwurfsmethodik für leistungsfähige Bildverarbeitungssysteme, Technische Universität Chemnitz, Lehrstuhl Schaltungs- und Systementwurf, Dresdner Arbeitstagung Schaltungs- und Systementwurf, DASS'99, 19.-20.05.99