

## ПРО ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В СИСТЕМІ “ХИЖАК-ЖЕРТВА”

С.В. Пашко<sup>[0000-0002-0453-4128]</sup>

Інститут програмних систем НАН України, 03187, Київ-187, проспект Академіка Глушкова, 40.

Розглядається система диференціальних рівнянь Лотки-Вольтерри з двома змінними керування. Описано оптимальне керування, яке забезпечує перехід до стаціонарної точки за мінімальний час. Знайдено також оптимальне керування в граничному випадку, за умови, що фазові траєкторії лежать поблизу стаціонарної точки. Побудовано оптимальні траєкторії руху у фазовому просторі, що мають вигляд спіралей.

Ключові слова: оптимальне керування, мінімальний час, стаціонарна точка.

Рассматривается система дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры с двумя переменными управления. Описано оптимальное управление, обеспечивающее переход к стационарной точке за минимальное время. Найдено также оптимальное управление в предельном случае, при условии, что фазовые траектории расположены вблизи стационарной точки. Построены оптимальные траектории движения в фазовом пространстве, имеющие вид спиралей.

Ключевые слова: оптимальное управление, минимальное время, стационарная точка.

В работе предлагается простая криптосистема на основе свойств абелевых групп и ассоциативно-коммутативных колец с единицей. Приведены алгоритмы с квадратичной временной и квадратичной сложностью по памяти для построения таблиц сложения и умножения для этих алгебр. Рассмотрены примеры использования этой системы, а также ее расширение на случай работы с гомофонами. Показано каким образом естественным путем находятся гомофоны с иллюстрацией их использования на простом примере сообщения. Табл. 5. Библиогр.: 3 назв.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо, криптосистема, гомофон, алгоритм.

We consider the system of Lotka-Volterra equations with two control variables. This system consists of two ordinary nonlinear differential equations  $\dot{x}_1(t) = (\alpha - \beta x_2(t) + u_1(t))x_1(t)$ ,  $\dot{x}_2(t) = (\delta x_1(t) - \gamma + u_2(t))x_2(t)$ .

Here, the values  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  describe the sizes of the prey and predator populations at time  $t$ , respectively;  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$  are positive constants; the controls  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  satisfy the conditions  $\bar{u}_1 \leq u_1(t) \leq 0$ ,  $\bar{u}_2 \leq u_2(t) \leq 0$ ,  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  are constants. If at some

moment of time  $t_0$  the inequalities  $x_1(t_0) > 0$ ,  $x_2(t_0) > 0$  are fulfilled, then the state point  $(x_1(t), x_2(t))$ , where the functions

$x_1(t)$  and  $x_2(t)$  satisfy the system of differential equations, moves along a closed curve counterclockwise around the stationary point  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  and  $x_1(t) > 0$ ,  $x_2(t) > 0$ . Let the state point move from a given position to the stationary point on a time interval  $[t_0, t_1]$

under the influence of some control. It is required to choose a control so that the transition time  $t_1 - t_0$  is minimal.

As a result of the change of variables, we obtain the system of equations

$$\dot{x}_1 = -(x_2 - u_1)(x_1 + \gamma), \quad \dot{x}_2 = (x_1 + u_2)(x_2 + \alpha),$$

where the controls satisfy previous conditions. The state point  $(x_1, x_2)$  should be moved to the origin in the minimum amount of time. We use the Pontryagin's maximum principle to construct an optimal control. Consider the function  $H$

$$H = -\psi_1(x_2 - u_1)(x_1 + \gamma) + \psi_2(x_1 + u_2)(x_2 + \alpha)$$

and the system of differential equations

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= (x_2 - u_1)\psi_1 - (x_2 + \alpha)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= (x_1 + \gamma)\psi_1 - (x_1 + u_2)\psi_2. \end{aligned}$$

According to the maximum principle, optimal control  $U(t) = (u_1(t), u_2(t))$  satisfies the condition

$$H(\Psi(t), X(t), U(t)) = \sup_{V \in G} H(\Psi(t), X(t), V), \quad \text{where } \Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)), \quad X(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad V = (v_1, v_2),$$

$$G = \{(v_1, v_2) : \bar{u}_1 \leq v_1 \leq 0, \bar{u}_2 \leq v_2 \leq 0\}.$$

Using the last relation and systems of differential equations for  $X(t)$  and  $\Psi(t)$ , we

construct optimal controls and optimal trajectories ending at the origin. Optimal controls are piecewise constant functions, and optimal trajectories look like spirals.

The optimality of the trajectories can be proved using the theory of regular synthesis, which was created by V.G. Boltyansky. In the paper we also found an optimal control for the limit case, on condition that the trajectories are located near a stationary point. In this case, the system of differential equations is linear, so the maximum principle is not only a necessary condition for optimality, but also a sufficient one.

Keywords: optimal control, minimum time, stationary point

## Вступ

Математики Альфред Джеймс Лотка та Віто Вольтерра запропонували модель взаємодії двох популяцій типу “хижак-жертва”, що являє собою систему двох звичайних лінійних диференціальних рівнянь з двома невідомими та має вигляд

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\alpha - \beta x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (\delta x_1 - \gamma)x_2,\end{aligned}\tag{1}$$

де величини  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$  означають кількості жертв і хижаків у момент часу  $t$  відповідно, а додатні числа  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$  є параметрами моделі. Вважається, що  $t \geq 0$  та початкові значення задовольняють співвідношенням  $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0$ . За таких умов точка  $(x_1(t), x_2(t))$ , де функції  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  задовольняють (1), рухається вздовж замкнутої кривої проти годинникової стрілки навколо стаціонарної точки  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  і виконуються нерівності  $x_1(t) > 0, x_2(t) > 0, t \geq 0$ . Подібні моделі застосовуються в біології, медицині, економіці.

Керовані динамічні системи типу “хижак-жертва” вивчалися в ряді робіт. В роботі [1] система Лотки-Вольтерри з двома змінними керування використовується для мінімізації витрат сільськогосподарського підприємства, що пов’язані з внесенням пестицидів та з іншими способами впливу на систему. В роботі [2] досліджується система “хижак-жертва” більш загального типу з двома змінними керування. Розв’язується задача про оптимальну швидкодію, доведено теореми про керованість та про існування оптимального керування, однак за умов, що не виконуються для моделі Лотки-Вольтерри. В [3] побудовано оптимальне керування для системи Лотки-Вольтерри з однією змінною керування, яка визначає ступінь сепарації популяцій. В статтях [4–7] також розв’язуються задачі оптимального керування системами “хижак-жертва” з однією змінною керування.

В даній роботі розглядається керована система Лотки-Вольтерри

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\alpha - \beta x_2 + u_1)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (\delta x_1 - \gamma + u_2)x_2, \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0,\end{aligned}\tag{2}$$

де  $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)$  – змінні керування,  $t \geq 0$ ,  $\bar{u}_1 < 0, \bar{u}_2 < 0$  – константи. Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна, розшукується керування, що за мінімальний час переводить задану фазову точку  $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0$  в точку  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ , яка є стаціонарною для системи (1).

## 1. Оптимальне керування в граничному випадку

Позначимо  $\bar{x}_1 = \frac{\gamma}{\delta}, \bar{x}_2 = \frac{\alpha}{\beta}$ ; тоді  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  – стаціонарна точка системи (1). Нехай  $x_i(t) = \bar{x}_i + \tilde{x}_i(t)$ ,

$i = 1, 2$ . Із співвідношень (2) випливає

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= (\alpha - \beta(\bar{x}_2 + \tilde{x}_2) + u_1)(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1) = (-\beta \tilde{x}_2 + u_1)(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= (\delta(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1) - \gamma + u_2)(\bar{x}_2 + \tilde{x}_2) = (\delta \tilde{x}_1 + u_2)(\bar{x}_2 + \tilde{x}_2), \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Якщо величини  $\tilde{x}_i$  досить малі у порівнянні з величинами  $\bar{x}_i$ , то з останньої системи випливає, що з високою точністю виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= (-\beta \tilde{x}_2 + u_1) \bar{x}_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= (\delta \tilde{x}_1 + u_2) \bar{x}_2;\end{aligned}$$

приходимо до системи

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -\frac{\beta\gamma}{\delta} \tilde{x}_2 + \frac{\gamma}{\delta} u_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{\alpha\delta}{\beta} \tilde{x}_1 + \frac{\alpha}{\beta} u_2,\end{aligned}$$

$$\bar{u}_i \leq u_i(t) \leq 0, \quad i=1,2, \quad t \geq 0.$$

Позначаючи  $a = \frac{\beta\gamma}{\delta}, b = \frac{\alpha\delta}{\beta}, \tilde{u}_1 = \frac{\gamma}{\delta} u_1, \tilde{u}_2 = \frac{\alpha}{\beta} u_2, \bar{\tilde{u}}_1 = \frac{\gamma}{\delta} \bar{u}_1, \bar{\tilde{u}}_2 = \frac{\alpha}{\beta} \bar{u}_2$ , отримуємо

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -a \tilde{x}_2 + \tilde{u}_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= b \tilde{x}_1 + \tilde{u}_2,\end{aligned}$$

$$\bar{\tilde{u}}_i \leq \tilde{u}_i(t) \leq 0, \quad i=1,2, \quad t \geq 0.$$

Виконавши заміну змінних  $\tilde{x}_1 = \sqrt{a} y_1, \tilde{x}_2 = \sqrt{b} y_2$ , отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -k y_2 + \tilde{u}_1 / \sqrt{a}, \\ \dot{y}_2 &= k y_1 + \tilde{u}_2 / \sqrt{b},\end{aligned}$$

де  $k = \sqrt{ab}$ . Нехай  $t = t_1 / k, z_i(t_1) = y_i(t_1 / k), v_i(t_1) = \tilde{u}_i(t_1 / k), i=1,2$ . Маємо

$$\frac{d}{dt_1} z_1(t_1) = \frac{d}{dt_1} y_1\left(\frac{t_1}{k}\right) = \frac{1}{k} \frac{d}{dt} y_1(t) = -y_2(t) + \frac{\tilde{u}_1(t)}{k\sqrt{a}} = -z_2(t_1) + \frac{v_1(t_1)}{a\sqrt{b}},$$

$$\frac{d}{dt_1} z_2(t_1) = \frac{d}{dt_1} y_2\left(\frac{t_1}{k}\right) = \frac{1}{k} \frac{d}{dt} y_2(t) = y_1(t) + \frac{\tilde{u}_2(t)}{k\sqrt{b}} = z_1(t_1) + \frac{v_2(t_1)}{b\sqrt{a}};$$

отже, справедлива система

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -z_2 + w_1, \\ \dot{z}_2 &= z_1 + w_2,\end{aligned}$$

$$\frac{\bar{\tilde{u}}_1}{a\sqrt{b}} \leq w_1(t) \leq 0, \quad \frac{\bar{\tilde{u}}_2}{b\sqrt{a}} \leq w_2(t) \leq 0, \quad t \geq 0,$$

де  $w_1 = \frac{v_1}{a\sqrt{b}}, w_2 = \frac{v_2}{b\sqrt{a}}$ .

Із сказаного випливає, що, не обмежуючи загальності, досить розглянути систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u_2,\end{aligned}$$

(3)

$$\bar{u}_i \leq u_i(t) \leq 0, \quad i=1,2, \quad t \geq 0,$$

де  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  – константи. В даному розділі розв’язується задача про оптимальну швидкодню для системи (3), тобто будується керування  $U(t) = (u_1(t), u_2(t))$ , що за мінімальний час переводить задану фазову точку у початок координат. Використовується принцип максимуму Понтрягіна, а також прийоми розв’язання подібних задач, розвинуті в [8].

Для того, щоб використати принцип максимуму Понтрягіна, розглянемо функцію  $H$

$$H = \psi_1(-x_2 + u_1) + \psi_2(x_1 + u_2)$$

та систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1,\end{aligned}$$

розв’язок якої визначається формулами

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \rho \cos(t + \varphi), \\ \psi_2(t) &= \rho \sin(t + \varphi),\end{aligned}\tag{4}$$

де  $\rho$  та  $\varphi$  – константи,  $\rho > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ . Згідно з принципом максимуму [8], оптимальне керування  $U(t)$  задовольняє умові

$$H(\Psi(t), X(t), U(t)) = \sup_{V \in G} H(\Psi(t), X(t), V),$$

де  $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ ,  $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $V = (v_1, v_2)$ ,  $G = \{(v_1, v_2) : \bar{u}_1 \leq v_1 \leq 0, \bar{u}_2 \leq v_2 \leq 0\}$ , звідки виводимо

$$\begin{aligned}u_1 &= 0 \quad \text{якщо} \quad \cos(t + \varphi) \geq 0, \\ u_1 &= \bar{u}_1 \quad \text{якщо} \quad \cos(t + \varphi) < 0, \\ u_2 &= 0 \quad \text{якщо} \quad \sin(t + \varphi) \geq 0, \\ u_2 &= \bar{u}_2 \quad \text{якщо} \quad \sin(t + \varphi) < 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Отже, оптимальні керування  $u_1(t), u_2(t)$  є кусково-постійними функціями та можуть приймати значення  $0, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ .

У випадку постійних  $u_1$  та  $u_2$  розв’язок системи рівнянь (3) визначається формулами

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \rho_1 \cos(t + \varphi_1) - u_2, \\ x_2(t) &= \rho_1 \sin(t + \varphi_1) + u_1,\end{aligned}\tag{6}$$

де  $\rho_1$  та  $\varphi_1$  – константи,  $\rho_1 > 0, 0 \leq \varphi_1 < 2\pi$ . Формули (6) описують коло з центром у точці  $(-u_2, u_1)$ . З (6) випливає, що частини фазових траєкторій, які відповідають відріzkам часу, на яких  $u_1$  та  $u_2$  приймають постійні значення, являють собою дуги кіл з центрами в  $(-u_2, u_1)$ . За умови оптимальності вектор  $(-u_2, u_1)$  може приймати одне з чотирьох значень  $O = (0, 0)$ ,  $A = (0, \bar{u}_1)$ ,  $B = (-\bar{u}_2, \bar{u}_1)$ ,  $C = (-\bar{u}_2, 0)$ . Точки  $O, A, B, C$  є центрами кіл, на яких лежать оптимальні фазові траєкторії  $X(t)$ .

Формули (4) та (6) показують, що рух точок  $\Psi(t), X(t)$  відбувається вздовж кіл проти годинникової стрілки з постійною швидкістю, яка становить один оберт за час  $2\pi$ . З (5) випливає, що в моменти  $t = -\varphi + k\pi/2$ , де  $k$  – ціле число, одна з керуючих величин  $u_1, u_2$  змінює своє значення. У кожний такий момент відбувається зміна кола, вздовж якого рухається фазова точка  $X(t)$ . Між двома моментами зміни керування фазова точка описує дугу кола з центральним кутом  $\pi/2$ ; перша та остання дуги фазової траєкторії можуть мати менші центральні кути. Очевидно, центри кіл, тобто точки  $O, A, B, C$ , з часом змінюються у

наступному порядку:

$$..., O, A, B, C, O, A, B, C, O, ... \quad (7)$$

На рис. 1 показано частину оптимальних фазових траєкторій. Якщо керування оптимальні, перед моментом потрапляння в початок координат  $O$  фазова точка  $X(t)$  рухається по одній з трьох дуг  $OD$ ,  $OF$  або  $OG$  з постійною швидкістю проти годинникової стрілки. Дуги  $OD$ ,  $OF$ ,  $OG$  мають центри відповідно  $C$ ,  $B$ ,  $A$  та центральні кути  $\pi/2$ , але фазова точка може описати менший кут, якщо рух по дузі починається не з крайньої точки (наприклад, з точки  $H$  дуги  $OD$ , рис. 1). Якщо перед потраплянням у точку  $O$  рух відбувався по дузі  $OD$ , то перед потраплянням на дугу  $OD$  рух відбувався по дузі з центром у точці  $B$ . Отже, у криволінійному чотирикутнику  $ODEF$  рух відбувається по дугам з центром  $B$ . Дуга  $FE$  утворена поворотом дуги  $OD$  навколо точки  $B$  на кут  $\pi/2$  за годинниковою стрілкою.

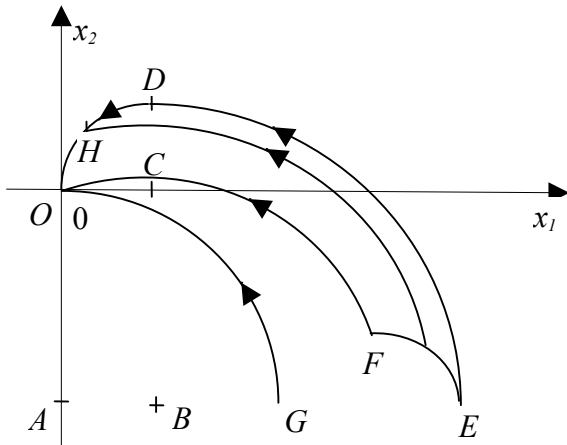


Рис. 1. Побудова оптимальних траєкторій

Якщо фазова точка перетинає дугу  $FE$ , то перед моментом потрапляння на цю дугу вона рухається по дузі з центром у точці  $A$ . Отже, можна збудувати нову частину оптимальної траєкторії, яка лежить на дузі з центром в  $A$  та з центральним кутом  $\pi/2$ . Множина таких дуг утворює криволінійний чотирикутник, що прилягає до криволінійного чотирикутника  $ODEF$  вздовж дуги  $FE$ . Продовжуючи, можна збудувати всі оптимальні траєкторії, що приводять у початок координат, проходячи на останньому етапі через дугу  $OD$ . Аналогічно можна побудувати всі оптимальні траєкторії, що приводять у початок координат, проходячи на останньому етапі через дуги  $OF$  та  $OG$ . В результаті будуть побудовані всі оптимальні траєкторії, через кожен точку площини буде проходити одна траєкторія.

На рис. 2 показані оптимальні траєкторії. Якщо фазова точка  $X(t)$  не належить кривим  $OK_1K_2...$ ,  $OL_1L_2...$ ,  $OM_1M_2...$ ,  $ON_1N_2...$ , оптимальні керування зберігають постійні значення. Нехай  $Q_1$  – частина площини, що лежить справа від кривої  $OM_1M_2...$  та вище кривої  $ON_1N_2...$ ,  $Q_2$  – частина площини, що лежить зліва від кривої  $OM_1M_2...$  та вище кривої  $OL_1L_2...$ ,  $Q_3$  – частина площини, що лежить зліва від кривої  $OK_1K_2...$  та нижче кривої  $OL_1L_2...$ ,  $Q_4$  – частина площини, що лежить справа від кривої  $OK_1K_2...$  та нижче кривої  $ON_1N_2...$  (рис. 2). Якщо фазова точка, рухаючись оптимально, перетинає одну із згаданих кривих, переходячи з області  $Q_i$  в область  $Q_j$ , оптимальні значення величин  $u_1, u_2$  змінюються. В областях  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  оптимальні значення змінних керування становлять відповідно  $u_1 = \bar{u}_1, u_2 = \bar{u}_2$ ;  $u_1 = 0, u_2 = \bar{u}_2$ ;  $u_1 = 0, u_2 = 0$ ;  $u_1 = \bar{u}_1, u_2 = 0$ . Під час руху в областях  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  фазова точка описує дуги кіл з центрами в точках  $B, C, O, A$  відповідно.

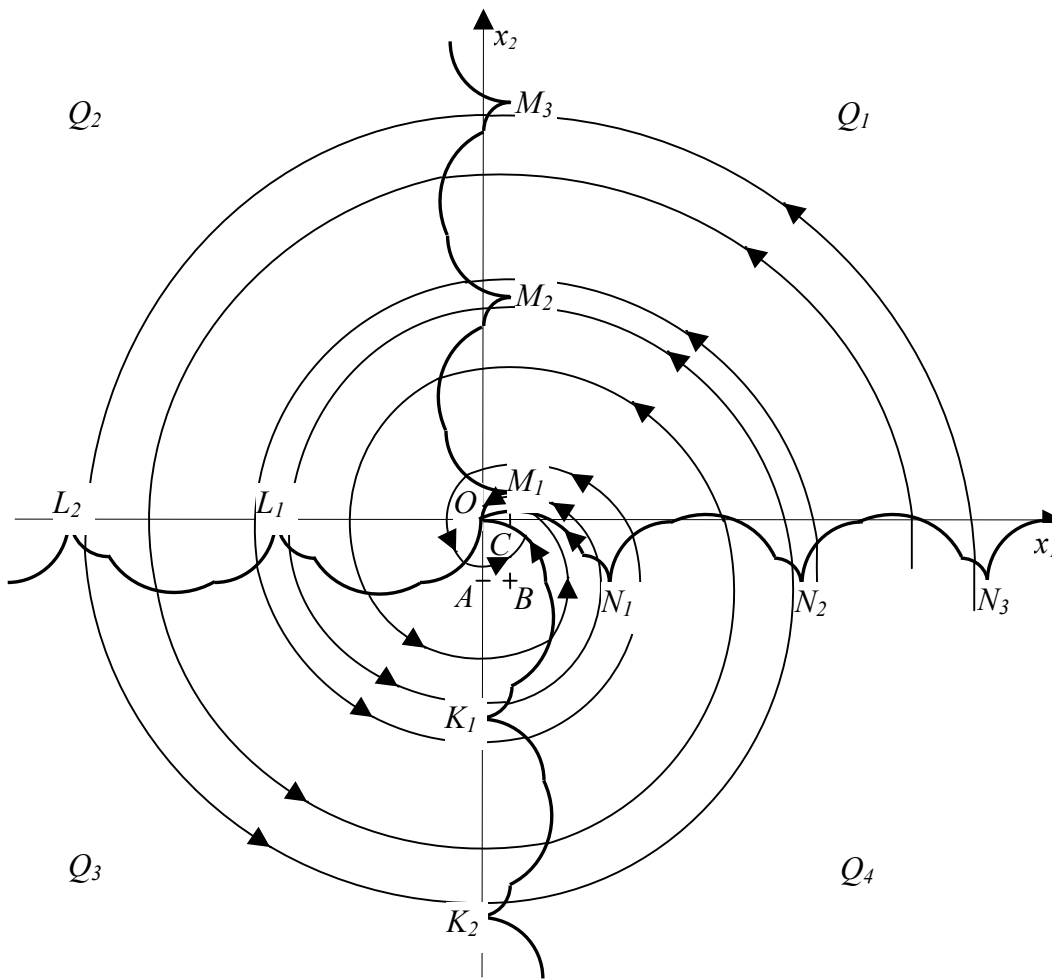


Рис. 2. Оптимальні траєкторії в граничному випадку

Крива  $OK_1K_2\dots$  складається з конгруентних криволінійних відрізків  $OK_1$ ,  $K_1K_2$ ,  $K_2K_3$ , .... Відрізок  $K_1K_2$  утворюється шляхом зсуву відрізка  $OK_1$  вниз на величину  $2|u_1 + u_2|$ , відрізок  $K_2K_3$  утворюється шляхом зсуву відрізка  $K_1K_2$  вниз на величину  $2|u_1 + u_2|$  і т. д. Відрізок кривої  $OK_1$  складається з трьох дуг, кожна з яких має центральний кут  $\pi/2$ . Перша дуга має центр  $(0, \bar{u}_1)$  та крайні точки  $(0,0)$  і  $(-\bar{u}_1, \bar{u}_1)$ . Центр другої дуги знаходиться в точці  $(0, \bar{u}_1 + \bar{u}_2)$ , ця дуга має крайні точки  $(-\bar{u}_1, \bar{u}_1)$  та  $(-\bar{u}_2, 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2)$ . Центр третьої дуги знаходиться в точці  $(0, 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2)$ , ця дуга має крайні точки  $(-\bar{u}_2, 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2)$  та  $(0, 2(\bar{u}_1 + \bar{u}_2))$ .

Крива  $OL_1L_2\dots$  утворюється шляхом повороту кривої  $OK_1K_2\dots$  на кут  $-\pi/2$ . Крива  $M_1M_2\dots$  утворюється шляхом повороту кривої  $OL_1L_2\dots$  на кут  $-\pi/2$ , зсуву вгору на величину  $|\bar{u}_2|$  та зсуву вправо на величину  $|\bar{u}_2|$ . Дуга  $OM_1$  має центральний кут  $\pi/2$ , радіус  $|\bar{u}_2|$  та центр у точці  $(-\bar{u}_2, 0)$ . Крива  $N_1N_2\dots$  утворюється шляхом повороту кривої  $M_1M_2\dots$  на кут  $-\pi/2$ , зсуву вниз на величину  $|\bar{u}_2|$  та зсуву вправо на величину  $|u_1 + u_2|$ . Криволінійний відрізок  $ON_1$  складається з двох дуг, кожна з яких має центральний кут  $\pi/2$ . Перша дуга має центр  $(-\bar{u}_2, \bar{u}_1)$  та крайні точки  $(0,0)$  і  $(-\bar{u}_1 - \bar{u}_2, \bar{u}_2)$ . Центр другої дуги знаходиться в точці  $(-\bar{u}_1 - \bar{u}_2, \bar{u}_1)$ , ця дуга має крайні точки  $(-\bar{u}_1 - \bar{u}_2, \bar{u}_2)$  та  $(-\bar{u}_1 - 2\bar{u}_2, 2\bar{u}_2)$ .

Для лінійних керованих систем принцип максимуму є не тільки необхідною, але й достатньою умовою оптимальності [8], тому побудоване керування оптимальне.

## 2. Оптимальне керування в загальному випадку

Розглянемо керовану систему Лотки-Вольтерри в загальному випадку. Виконуючи заміну змінних  $x_1 = \delta y_1 - \gamma$ ,  $x_2 = \beta y_2 - \alpha$  в системі

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(x_2 - u_1)(x_1 + \gamma), \\ \dot{x}_2 &= (x_1 + u_2)(x_2 + \alpha), \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq 0, \quad i=1,2, \quad t \geq 0,\end{aligned}\tag{8}$$

отримуємо систему (2), тому в даному розділі розв'язується задача про мінімальний час переходу до початку координат для системи (8). Початкові значення повинні задовольняти умовам  $x_1(0) > -\gamma$ ,  $x_2(0) > -\alpha$ ; вважаємо також, що виконується нерівність  $\alpha + \bar{u}_1 > 0$ .

Інтегруючи систему диференціальних рівнянь (8) за умови, що величини  $u_1$  та  $u_2$  приймають постійні значення, отримуємо співвідношення

$$e^{-x_1}(x_1 + \gamma)^{\gamma-u_2} e^{-x_2}(x_2 + \alpha)^{\alpha+u_1} = C,\tag{9}$$

аналіз якого показує, що фазові криві системи (8) замкнуті [9]; тут  $C > 0$  — величина, що не залежить від часу. За умови постійності  $u_1$  та  $u_2$  точка  $(x_1(t), x_2(t))$ , де функції  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  задовольняють (8), рухається вздовж замкнутої кривої проти годинникової стрілки навколо стаціонарної точки  $(-u_2, u_1)$  і виконуються нерівності  $x_1(t) > -\gamma$ ,  $x_2(t) > -\alpha$ ,  $t \geq 0$ .

Для того, щоб використати принцип максимуму, розглянемо функцію  $H$

$$H = -\psi_1(x_2 - u_1)(x_1 + \gamma) + \psi_2(x_1 + u_2)(x_2 + \alpha)$$

та систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= (x_2 - u_1)\psi_1 - (x_2 + \alpha)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= (x_1 + \gamma)\psi_1 - (x_1 + u_2)\psi_2.\end{aligned}\tag{10}$$

Як і в попередньому розділі, оптимальне керування  $U(t)$  повинно задовольняти умові

$$H(\Psi(t), X(t), U(t)) = \sup_{V \in G} H(\Psi(t), X(t), V),$$

звідки виводимо

$$\begin{aligned}u_1 &= 0 \quad \text{якщо} \quad \psi_1(t) \geq 0, \\ u_1 &= \bar{u}_1 \quad \text{якщо} \quad \psi_1(t) < 0, \\ u_2 &= 0 \quad \text{якщо} \quad \psi_2(t) \geq 0, \\ u_2 &= \bar{u}_2 \quad \text{якщо} \quad \psi_2(t) < 0.\end{aligned}$$

Оптимальні керування  $u_1(t), u_2(t)$  є кусково-постійними функціями та можуть приймати значення  $0, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ .

Частина фазової траєкторії, що відповідає відрізку часу, на якому величини  $u_1$  та  $u_2$  приймають постійні значення, являє собою частину кривої (9) зі стаціонарною точкою  $(-u_2, u_1)$ . За умови оптимальності вектор  $(-u_2, u_1)$  може приймати одне з чотирьох значень  $O = (0, 0)$ ,  $A = (0, \bar{u}_1)$ ,  $B = (-\bar{u}_2, \bar{u}_1)$ ,  $C = (-\bar{u}_2, 0)$ . Легко довести, що нетривіальний розв'язок  $\Psi(t)$  системи (10) перетинає по черзі перший, другий, третій та четвертий квадранти, тому точки  $O, A, B, C$  з часом змінюються у порядку (7).

На рис. 3 зображено оптимальні траєкторії руху, побудова яких принципово не відрізняється від побудови у граничному випадку. Тонкими лініями зображено оптимальні траєкторії, товстими — лінії перемикання, пунктирними — криволінійні відрізки, що одночасно є лініями перемикання та траєкторіями. Фазова точка може потрапити у початок координат, рухаючись на останньому етапі вздовж одного з трьох криволінійних пунктирних відрізків, кожний з яких описується рівнянням (9). Верхній пунктирний відрізок відповідає керуванню  $u_1 = 0, u_2 = \bar{u}_2$ ; середній — керуванню  $u_1 = \bar{u}_1, u_2 = \bar{u}_2$ ; нижній — керуванню  $u_1 = \bar{u}_1, u_2 = 0$ . Початкові точки цих відрізків легко знайти, використовуючи числовий метод розв'язання

системи рівнянь (8), (10). Згідно з (7), якщо перед потраплянням у початок координат рух відбувався вздовж верхнього пунктирного відрізка, то перед потраплянням на цей відрізок фазова точка рухалася вздовж частини кривої (9) за умов  $u_1 = \bar{u}_1, u_2 = \bar{u}_2$ ; початкову точку цієї частини можна знайти, використовуючи числовий метод розв'язання системи (8), (10). Продовжуючи, збудуємо оптимальну траєкторію, що веде у початок координат через фіксовану точку верхнього пунктирного відрізка. Виконуючи таку побудову для всіх точок трьох пунктирних відрізків, отримуємо всі оптимальні траєкторії. Вони заповнюють всю множину  $Q = \{x_1 > -\gamma, x_2 > -\alpha\}$ ; через кожен точку цієї множини, відмінну від початку координат, проходить єдина оптимальна траєкторія. Лінії перемикання розбивають множину  $Q$  на чотири області. Оптимальні значення змінних керування  $u_1, u_2$  становлять відповідно: у верхній правій області  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ ; у верхній лівій області  $0, \bar{u}_2$ ; у нижній лівій області  $0, 0$ ; у нижній правій області  $\bar{u}_1, 0$ . Оптимальні траєкторії системи (8), зображені на рис. 3, розраховані за умов  $\alpha = 8, \gamma = 10, \bar{u}_1 = -1.5, \bar{u}_2 = -0.7$ .

Зауважимо, що принцип максимуму є необхідною умовою оптимальності, тобто його справедливості в загальному випадку не гарантує оптимальності. Але можна довести, що для побудованих керувань та траєкторій виконуються умови регулярного синтезу [10], звідки випливає їхня оптимальність. Також легко довести, що оптимальні керування є кусково-постійними функціями від часу.

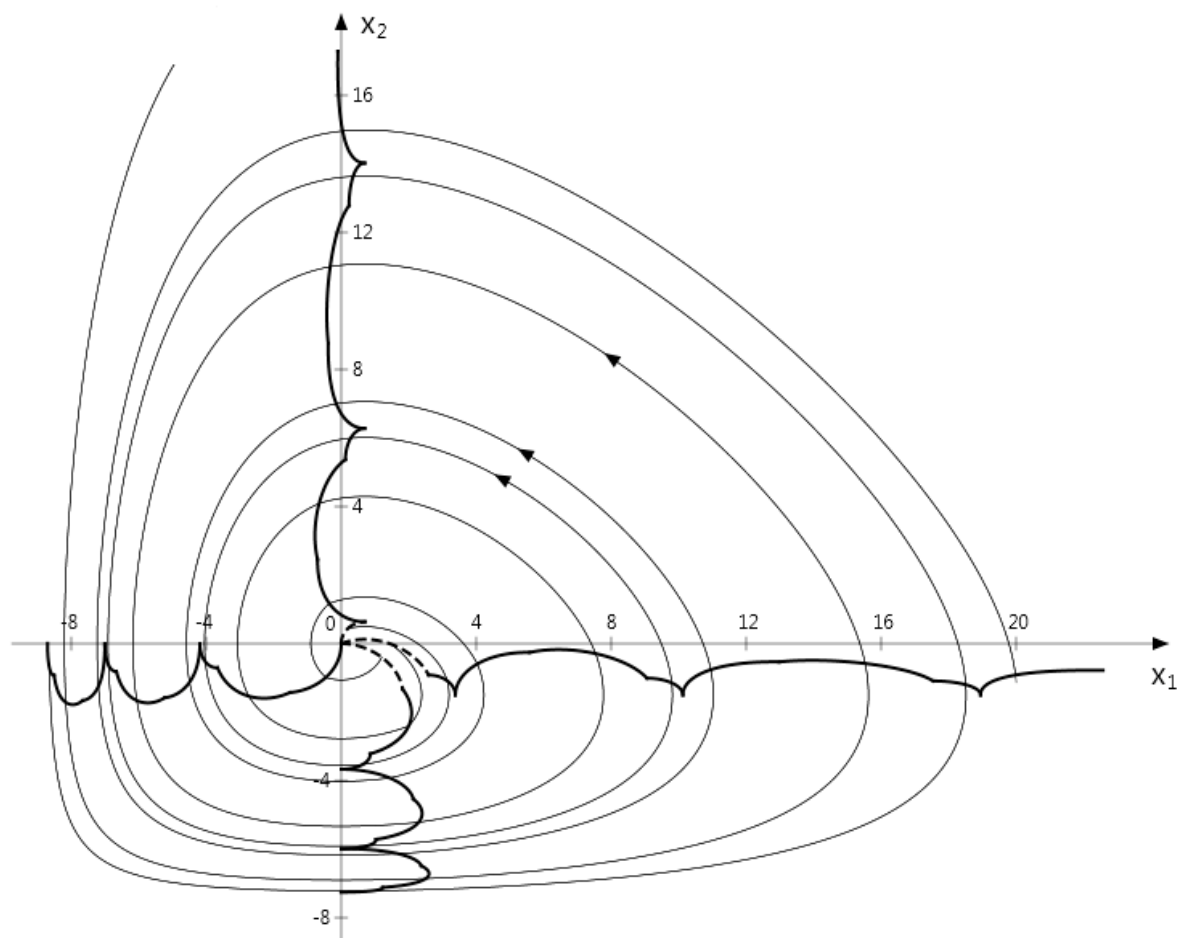


Рис. 3. Оптимальні траєкторії керованої системи Лотки-Вольтерри

## Висновки

В роботі розглянуто задачу про оптимальну швидкодію для керованої системи диференціальних рівнянь Лотки-Вольтерри. Вимагається мінімізувати час переходу до стаціонарної точки, яка в результаті заміни змінних перетворюється на початок координат. Для всіх допустимих початкових значень побудовано оптимальне керування та оптимальну траєкторію руху у фазовому просторі. Оптимальні керування являють собою кусково-постійні функції від часу, а оптимальні траєкторії мають вигляд спіралей, що ведуть до початку координат.

## Література



1. Vincent, Thomas L. Pest management programs via optimal control theory. *Biometrics*. 1975. 31. P. 1–10.
2. Albrecht, Felix, et al. On the control of certain interacting populations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1976. 53.3. P. 578–603.
3. Yosida, Setuzô. An optimal control problem of the prey-predator system. *Funck. Ekvacioj*. 1982. 25. P. 283–293.
4. Колмановский В.Б., Спивак А.К. Об управлении по быстрдействию системой «хищник–жертва». *Прикладная математика и механика*. 1990. 54.3. С. 502–506.
5. Михайлова Е.В. Оптимальное управление в системе Лотки–Вольтерры «хищник–жертва». Труды 3-й Всерос. науч. конф., 29–31 мая 2006 г. *Математическое моделирование и краевые задачи*. 2006. С. 123–126.
6. Apreutesei, Narcisa C. An optimal control problem for a prey–predator system with a general functional response. *Applied mathematics letters*. 2009. 22.7. P. 1062–1065.
7. Sadiq, AL-Nassir. The Dynamics and Optimal Control of a Prey-Predator System. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017. 13.9. P. 5287–5298.
8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1969. 384 с.
9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. 367 с.
10. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука. 1969. 408 с.

## References

1. Vincent, Thomas L. Pest management programs via optimal control theory. *Biometrics*. 1975. 31. P. 1–10.
2. Albrecht, Felix, et al. On the control of certain interacting populations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1976. 53.3. P. 578–603.
3. Yosida, Setuzô. An optimal control problem of the prey-predator system. *Funck. Ekvacioj*. 1982. 25. P. 283–293.
4. Kolmanovskii V.B., Spivak A.K. On the performance management of the predator – prey system. *Applied mathematics and mechanics*. 1990. 54.3. P. 502–506. (in Russian).
5. Mihailova E.V. Optimal control in the Lotka – Volterra system “predator – prey”. *Mathematical modeling and boundary value problems*. 2006. P. 123–126. (in Russian).
6. Apreutesei, Narcisa C. An optimal control problem for a prey–predator system with a general functional response. *Applied mathematics letters*. 2009. 22.7. P. 1062–1065.
7. Sadiq, AL-Nassir. The Dynamics and Optimal Control of a Prey-Predator System. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017. 13.9. P. 5287–5298.
8. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. Moscow: Nauka. 1969. (in Russian).
9. Arnold V.I. Ordinary differential equations. Izhevsk: Izhevsk Republican Printing House. 2000. (in Russian).
10. Boltyanskii V.G. Mathematical methods of optimal control. Moscow: Nauka. 1969. (in Russian).

Одержано 28.02.2020

## Про автора:

Пашко Сергій Володимирович,

доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник.

Кількість наукових публікацій в українських виданнях – понад 30.

Кількість наукових публікацій в зарубіжних виданнях – 2.

Індекс Гірша в SCOPUS – 3.

<http://orcid.org/0000-0002-0453-4128>.

## Місце роботи автора:

Інститут програмних систем

НАН України,

03187, Київ-187,

проспект Академіка Глушкова, 40.

Факс: (38)(044) 526-62-63

Тел.: (38)(044) 526 60 25, 068-385-34-66(моб.)

E-mail: pashko55@yahoo.com