

COSECHA ESTOCÁSTICA ÓPTIMA DE RODALES DE PINO RADIATA

Dr. Eduardo Navarrete Suárez¹

¹ Universidad de La Frontera, Fco Salazar 01145 Casilla 54-D, Temuco, Chile, enava@ufro.cl

RESUMEN

Se desarrolló un modelo de cosecha aleatoria óptima para los rodales de pino radiata (*pinus radiata*) bajo procesos de difusiones estocásticas, logística del stock de madera y de Brown para los precios, con agentes decisionales propensos al riesgo. El modelo optimiza el valor actualizado de la cosecha de los rodales coetáneos, un solo periodo de rotación de cosecha, o modelo de Vicksell.

El efecto de la aleatoriedad de los precios y del inventario de rodales es muy significativo. En el caso de la aplicación a una empresa forestal, aumenta el corte óptimo actual en un 66,9 % y el óptimo determinístico en un 93,3%. Ambas volatilidades son igualmente importantes, para valores inferiores al 50% prima la volatilidad de los precios y superiores la del inventario de rodales. Un aumento del 10 puntos porcentuales de sus actuales volatilidades, en el caso de los precios incrementa el nivel de corta óptimo estocástico en un 11,1% y en el caso de la del inventario de rodales en un 26%.

Los parámetros de la difusión logística se estimaron mediante el software Logolet Lab de la Universidad de Rockefeller la que permite trabajar con datos desigualmente espaciados y concentrados en su ventanilla de explotación y que además permite calcular los rangos de confiabilidad para los parámetros a pesar de la heterocestadidad de los datos, mediante un muestreo de Monte Carlo por el método de “bootstrap”.

Palabras claves: Cosecha estocástica óptima de Vicksell, Cosecha estocástica optima de Faustmann, Opciones reales.

1: INTRODUCCIÓN

Modelos de corta óptima de los rodales

Las plantaciones de pino radiata se hacen en rodales coetáneos que se plantan, intervienen y cosechan simultáneamente. Su rendimiento depende de las condiciones locales de suelo y clima, y de las intervenciones de manejo y de explotación que se realicen sobre ella. Por lo que la variable más importante a optimizar es el periodo de la rotación de la cosecha de los rodales.

Los primeros modelos de corte óptimo que aparecen en la bibliografía fueron deterministas, ver Faustman [6], Fisher [7], y Samuelson [19]. Por ello no tienen en cuenta la irreversibilidad, la duración de las inversiones, ni la aleatoriedad del precio o del crecimiento de las plantaciones. Sin embargo como su presencia produce flexibilidad operacional entendida como tiempo de corta, de abandono o cambio del tipo de explotación, estas características generan las condiciones óptimas para el desarrollo de los modelos basados en el enfoque de opciones reales, (ver Mascareñas [13]).

La bibliografía actual corrige las falencias anotadas y presenta un conjunto destacado de modelos de opciones reales, que consideran procesos de difusión aleatoria de los precios, de Brown o de reversión a la media (ver, Clark y Reed [2], Thompson [21], Platinga [18], Inseley y Rollins [10]). Otros, como Morck [16] y Álvarez y Koskela [1] incorporan además la difusión aleatoria del stock de madera de las plantaciones. Entre estos últimos, el modelo de Álvarez y Koskela es el único que trata por separado ambas difusiones, estén o no correlacionadas, y lo hace mediante un modelo de control impulsivo en un ambiente de neutralidad frente al riesgo de sus agentes, lo que puede considerarse como una extensión del modelo de Fisher al caso aleatorio, Fisher [7].

Objetivo del trabajo

No se encuentra en la revisión bibliográfica ejemplos de aplicación real de la difusión estocástica del crecimiento de los rodales. Los modelos teóricos de Morck y Álvarez y Koskela sólo se ilustran con ejemplos artificiales. El primer objetivo de esta investigación es formular un modelo estocástico de cosecha óptima de rodales frente a la incertidumbre de los precios y del

inventario de madera, que optimice el objetivo funcional, de Vicksell. El segundo objetivo general de esta investigación es evaluar el impacto que la volatilidad de los procesos de difusión estocásticos de los precios y del inventario tiene en el periodo óptimo de cosecha.

2: MODELO OPTIMO DE COSECHA ESTOCÁSTICA DE RODALES

2.1 Formulación del modelo

Ecuaciones de difusión lineal

El modelo considera las siguientes ecuaciones de difusión:

Difusión de ITO para el stock de madera, dado por la ecuación (1).

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu(V_t)dt + \sigma V_t dW \quad (1)$$

Difusión geométrica de Brown para los precios, dado por la ecuación (2).

$$\frac{dP_t}{P_t} = \alpha dt + \beta dW \quad (2)$$

con:

- V_t = Volumen de stock de Madera a tiempo t
- $\mu(V_t)$ = Tasa de deriva de la difusión del inventario de madera
- σ = Volatilidad de la difusión del inventario de madera
- P_t = Precio "stumpage" de los árboles en pie
- α = Tasa de deriva de los precios en pie
- β = Volatilidad de los precios en pie
- W = Difusión de Wiener

Determinación del funcional a optimizar

Bajo el supuesto de que existe una solución débil (V_t, t), de las ecuaciones de difusión (1,2) y de las condiciones iniciales $V_0 \geq 0, P_0 \geq 0$ (ver Johnson, [11]), se evalúa el volumen de corta óptimo de los rodales coetáneos, para el valor actualizado de sus cosechas, en el caso de una sola rotación de cosecha o modelo de Vicksell, extremando el objetivo funcional (3).

$$W_V(V_0, P_0) = \frac{\sup}{\forall(t \geq t_0)} E^P (e^{-rt} P_t V_t) \quad (3)$$

$$t_0 = \inf(t \geq 0 : V_t \leq 0)$$

2.2 Reformulación del problema de cosecha óptima de Vicksell

El modelo estocástico de Vicksell dado por las ecuaciones (1,2 y 3) es de difícil solución. Sin embargo, el siguiente teorema permite reformularlo como un problema de parada óptima con una sola difusión de más fácil solución.

Teorema 1: Existe una métrica probabilística Q equivalente a P tal que

$$W_V(V_0, P_0) = \frac{\sup}{\forall(t \geq t_0)} E^P (e^{-rt} P_t V_t) \quad (4)$$

$$= P_0 \sup E^Q [e^{-(r-\alpha)t} V_t]$$

Más aún, bajo la métrica Q el proceso V_t sigue la siguiente difusión

$$dV_t = \{\mu(V_t) - \beta\sigma\} V_t dt + \sigma V_t d\bar{W} \quad (5)$$

Demostración: Reemplazando P_t en (3) por $P_t = P_0 e^{\alpha t} M_t$, como $M_t = \exp \{ \beta W_t - 1/2 \beta^2 t \}$ es una martingala, que permite definir Q mediante la derivada de Radon-Nikodym $dQ/dP = M_t$. La aplicación directa de los teoremas I y II de Girsanov ver, Oksendal [17], págs. 155-157] permite deducir directamente las ecuaciones (4) y (5).

Optimización del problema

Aplicando el lema de Dynkins ver, Oksendal, [17], y bajo el supuesto de independencia de los dos procesos de difusión, se puede simplificar aún más el funcional (4).

$$E^P [e^{-rT} P_T V_T] = P_0 V_0 + P_0 E^Q \int_0^T e^{-(r-\alpha)s} \pi(V_s) ds \quad (6)$$

En este caso la métrica de crecimiento económico neto de los rodales del lema queda dada por

$$\pi(V_t) = \mu(V_t) + \beta\sigma V_t - (r-\alpha)V_t \quad (7)$$

Obviamente, como lo demostró Álvarez [1], si la métrica $\pi(V_t)$ es positiva para todos los valores de V_t , no existe una estrategia de corte óptimo de los rodales y, si es negativa para todos ellos, deben cortarse de inmediato. Si la métrica es cóncava, alcanza su máximo para la brecha de Álvarez, dada por

$$\frac{\partial \mu(V)}{\partial V} = (r - \alpha) \quad (8)$$

y la solución óptima del problema de parada óptima

$$\text{Max} [\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F''(V) + [\mu(V) - \beta \sigma] V F'(V) - (r - \alpha) F(V), V - F(V)] = 0 \quad (9)$$

Zona de continuación

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F''(V) + [\mu(V) - \beta \sigma] V F'(V) - (r - \alpha) F(V) = 0 \quad (10)$$

$$\forall (V \leq V^*)$$

Zona de corta inmediata

$$V - F(V) = 0 \quad (11)$$

$$\forall (V > V^*)$$

La solución de este sistema queda dada por la ecuación (12), Johnson T.C., [11]

$$F(V) = \begin{cases} A\Psi(V) + B\Phi(V) & V < V^* \\ V & V \geq V^* \end{cases} \quad (12)$$

donde las funciones Ψ (resp., Φ) son estrictamente crecientes (resp., decrecientes) y dado que la función objetivo es pequeña, acotada y que V es siempre positiva y en el límite inferior debe permanecer en cero, necesariamente B debe ser cero.

La solución además debe cumplir las condiciones de "smooth-pasting" Johnson, [11] en los puntos fronteras V^* . Por lo tanto

$$A \Psi(V^*) = V^* \quad \text{y} \quad A \Psi'(V^*) = 1$$

$$A = V^* / \Psi(V^*) = 1 / \Psi'(V^*)$$

tal que V^* debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\Psi(V^*) = V^* \Psi'(V^*) \quad (13)$$

(4 y 5) queda dada por la ecuación (9) de Hamilton-Jacobi-Bellman [HJB], (ver Johnson, [11]).

Bajo el supuesto de la existencia de un punto frontera V^* que divide la zona en una de continuación del crecimiento de los rodales ($V \leq V^*$) y otra de corte ($V \geq V^*$) inmediato de ellos. Se puede resolver la inecuación (9), encontrando las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales, de continuación (10), y de corte (11).

De donde finalmente el funcional óptimo es

$$W_V(V_0, P_0) = \begin{cases} P_0 e^{-(r-\alpha)T} V & V \geq V^* \\ P_0 e^{-(r-\alpha)T} \frac{\Psi(V)}{\Psi'(V^*)} & V \leq V^* \end{cases} \quad (14)$$

Estas ecuaciones son similares al teorema 2.8 de Álvarez y Koskela [1] para situaciones frente al riesgo.

3: MODELOS DE DIFUSIÓN ESTOCÁSTICOS SIGMOIDEOS DEL INVENTARIO DE MADERA

3.1 Procesos de difusión

Los modelos de difusión estocástica del crecimiento de los rodales que más comúnmente se encuentran en la bibliografía son el proceso de difusión de Brown y el proceso de Reversión a la Media. Sin embargo, dado que el requerimiento principal para el crecimiento de los rodales es que estos tengan una estructura sigmoidea, (ver García [8]), se seleccionó un modelo de difusión logística que es un caso especial de la ecuación de difusión geométrica de reversión a la media (ver Hull, [8]), dado por la siguiente expresión:

$$dV = \mu V (1 - \gamma V) dt + \sigma V dw. \quad (15)$$

Esta ecuación se puede integrar (ver Kloden y Platen 1991, página 125)

$$V_t = \frac{V_0 \text{Exp}[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W]}{1 + \mu \gamma V_0 \int_{t_m}^t \text{Exp}[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma W] ds} \quad (16)$$

y su valor esperado esta dado por la ecuación (17)

$$E(V_t) = \frac{1/\gamma}{1 + \frac{1 - \gamma V_0}{\gamma V_0} e^{-\mu t}} \quad (17)$$

Haciendo $V_0 = 1/(2\gamma) =$ volumen de saturación medio y $t_0 = t_m =$ tiempo para alcanzar dicho volumen. Se llega a la expresión usual de la curva logística (18).

$$E(V_t) = \frac{1/\gamma}{1 + e^{-\mu(t-t_m)}} \quad (18)$$

Con

$1/\gamma =$ Volumen de saturación

$\mu =$ Tasa de crecimiento = $\text{Ln}(81)/\Delta t$

$t_m =$ Tiempo para alcanzar el volumen de saturación medio

$\Delta t =$ Tiempo para pasar del 10 % al 90% del volumen de saturación.

3.2 Propiedades estacionarias de las difusiones logísticas

Merton [14] demostró en el caso de los procesos geométricos de Reversión a la Media que éstos tienden a una distribución estacionaria Gamma con el tiempo.

Ewald y Yang [5] demostraron que los distintos momentos de esta distribución se pueden calcular mediante la siguiente ecuación recursiva:

$$E(V^{n+1}) = E(V^n) [1/\gamma + (n-1)\sigma^2/(2\mu\gamma)] \quad (19)$$

con

$$E(V^n) = \frac{\sum_{i=1}^n V_i^n}{n} \quad (20)$$

Como sólo los dos primeros momentos son independientes, puede calcularse la varianza de saturación $\text{Var}(\infty)$ por la expresión (23) en función de los parámetros de la difusión logística.

$$E[V^1] = 1/\gamma - \sigma^2/(2\mu\gamma) = \overline{V^1} \quad \text{y} \quad (21)$$

$$E[V^2] = 1/\gamma [1/\gamma - \sigma^2/(2\mu\gamma)] = \overline{V^2} \quad (22)$$

de donde la varianza en la zona de saturación es

$$\text{Var}(\infty) = E(V^2) - E(V^1)^2 = \frac{\sigma^2(2\mu - \sigma^2)}{4(\mu\gamma)^2} \quad (23)$$

A partir de esta ecuación puede estimarse el parámetro de volatilidad “ σ ” de la logística mediante la expresión (24)

$$\sigma^2 = \mu + \mu \sqrt{1 - 4\gamma^2 \text{Var}(\infty)} \quad (24)$$

4: DATOS EXPERIMENTALES Y AJUSTES DE PARÁMETROS DE DIFUSIÓN

4.1 Datos de rodales

Los datos experimentales fueron suministrados por la empresa forestal Minínco [20] y pertenecen a 122 inventarios de cosechas de sus rodales entre 1999 y 2005, para parcelas entre 30,00 y 35,00 metros de índice de sitio y corresponden a terrenos de aptitud forestal 1. Estos datos ocurren en una ventanilla de tiempo entre 20 y 26 años de edad, con una gran concentración entre los 20 y 22 años, lo que dificultó en gran medida la formación de series significativas y representativas del crecimiento del volumen del stock de los rodales. La edad se calculó en fracciones de años para los intervalos no homogéneos. El volumen total de madera comercial por hectárea, VOLT/HECT (m^3/ha), se calculó sumando la pulpa, la madera comercial, la madera industrial y la madera podada. Esta serie se representa en la figura 4.1. Además para investigar el efecto del índice de sitio en la volatilidad, se desagregó la serie global en los tres siguientes rangos de índice de sitio: 30-31, 32 y 33-35 metros, los que se presentan en la figura 4.2

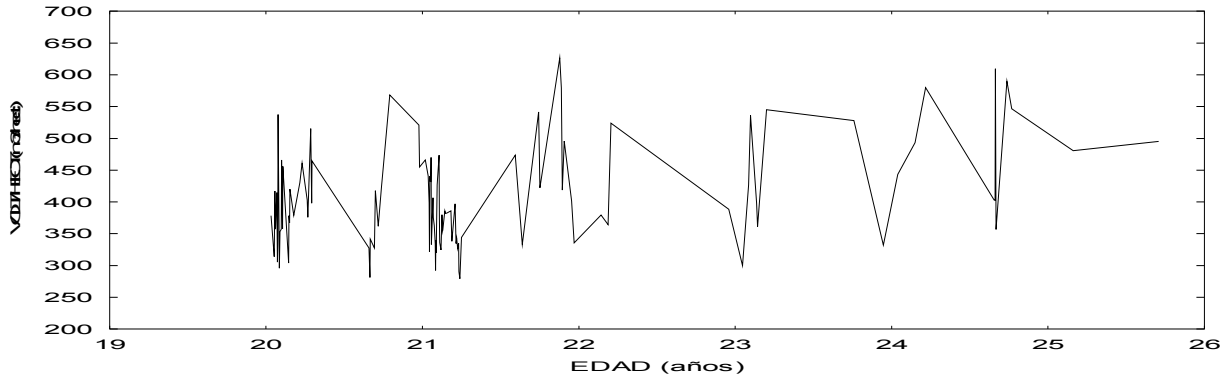


Figura 4.1. Volumen total de madera por hectárea.

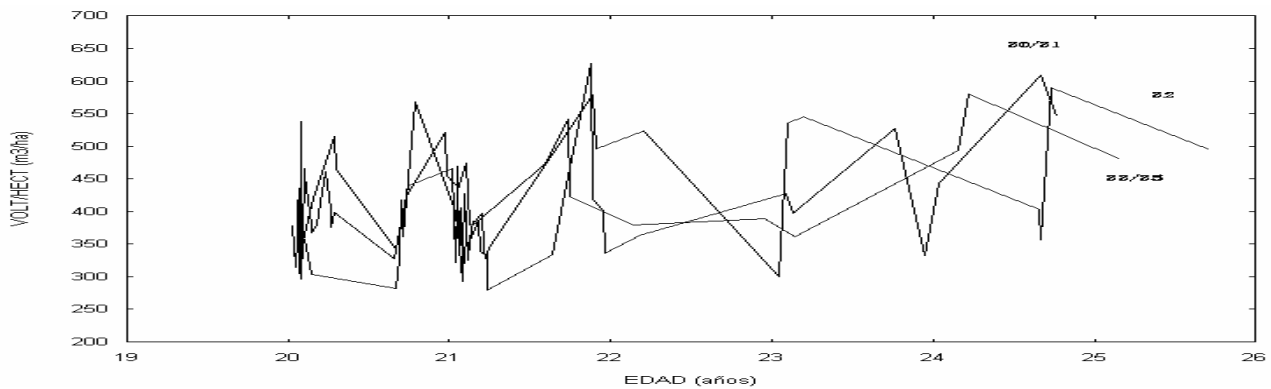


Figura 4.2. Volumen total de madera por hectárea por rango de índice de sitio

4. 2 Ajuste de la difusión logística del crecimiento

Se determinaron los parámetros μ , γ , y t_m , ajustando no linealmente el valor esperado de la variable logística ecuación (18) a las distintas series de datos, mediante el software Logolet Lab (ver Meyer, Young y Ausubel, 1999).

El software además calcula los rangos de confiabilidad para un 95% mediante simulación de Monte Carlo mediante el método de “bootstrap” para resolver el problema de heterocestacidad de los datos y permite calcular la $Var(\infty)$ a partir del rango de confiabilidad del volumen de saturación. Los resultados del ajuste para la serie agregada se muestran en la figura 4.3 y las series desagregadas en las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 del apéndice 1. El resumen de estos datos aparece en la tabla 4.1

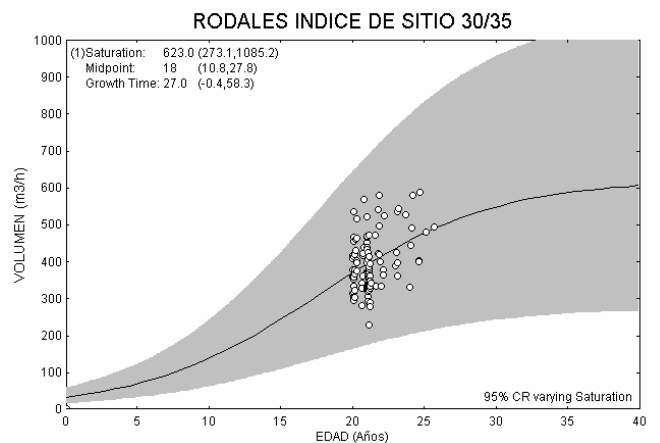


Figura 4.3: Ajuste Logolet de la serie logística 30/35

Tabla 4.1 Ajuste de difusión logística para la variable VOLT/HECT (m3/ha)

Indices	30/35	30/31	32	33/35
Sitio				
Datos	122	36	58	28
μ	0,163	0,1998	0,2289	0,2289
σ	0,00161	0,00175	0,00171	0,00179
Var(∞)	(228.01) ²	(222.25) ²	(264.8) ²	(234.75) ²
σ	0,274	0,325	0,326	0,353

Queda claro de la observación de la tabla 4.1 que si bien la tasa de deriva y el volumen de saturación aumentan levemente con los mayores índices de sitio desagregados. La variabilidad no disminuye con ella, al contrario aumenta levemente por lo que tiene sentido solo seguir con la serie agregada por su mayor representatividad y menor volatilidad.

4.3 Difusión del precio de la madera

Bajo el supuesto de que los precios del bosque en pie están altamente correlacionados con los precios comerciales de los rollizos se usa la serie histórica nacional de los precios de exportación de rollizos entre 1985 y 2007, tabla 4.3.

Tabla 4.3. Precios de exportación de trozas

Años	Aserrables US\$FOB/mts ³	Pulpablea US\$FOB/mts ³
1985	32	27
1986	34	28
1987	39	27
1988	45	27
1989	43	27
1990	49	32
1991	51	40
1992	47	40
1993	85	38
1994	63	46
1995	67	43
1996	65	52
1997	62	55
1998	52	54
1999	49	53
2000	46	42
2001	48	34
2002	46	41,6
2003	45,9	37,4
2004	48,6	33,0
2005	57,0	33,5
2006	60	36
2007	63	40

Fuente: INFOR

Los parámetros se encuentran haciendo la transformación $p_t = \ln(P_t/P_{t-1})$ y calculando

la media y varianza de la nueva serie mediante las ecuaciones

$$\bar{p} = \sum_{t=1}^n \frac{p_t}{n} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (p_t - \bar{p})^2 \quad (25)$$

El resumen de los parámetros de difusión de los precios nacionales de madera pulpable está detallado en la tabla 4.4.

Tabla 4.4 Resumen de Parámetros de difusión de precios

Precio	En pie	Aserrable	Pulpable
%	100	83,9	16,1
Deriva	2,9	3,08	1.79
Volatilidad	15,9	16,52	12,74

4.4 Tasa de descuento a usar.

La tasa de descuentos se calcula mediante el método CAPM (ver Copeland, Weston y Shastri, 2005)

$$K_e = R_f + \beta(E(R_m) - R_f) \quad (32)$$

con: K_e : Tasa de descuento

R_f : Tasa libre de riesgo 5,3%

β : Beta del proyecto 0,67

Es decir $K_e = 5,3 + 0,67(12,7 - 5,3) = 10,3$

5: APLICACIÓN DEL MODELO A LA COSECHA OPTIMA DE RODALES DE PINO

5.1 Solución determinista

La solución determinista para una sola rotación queda dada por la ecuación (27)

$$\frac{\partial(P_t V_t)}{\partial t} = (r - \alpha) P_t V_t \quad (27)$$

Reemplazando para las siguientes ecuaciones de deriva determinista de los procesos

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \alpha P_t \quad \frac{\partial V_t}{\partial t} = \mu V_t (1 - \gamma V_t) \quad (28)$$

en la ecuación (27) se llega a la siguiente solución óptima.

$$V^D = \frac{\mu + \alpha - r}{\mu \gamma} \quad (29)$$

5.2 Solución estocástica de Vicksell

El valor esperado del crecimiento económico neto de Álvarez y Koskela [1], para la difusión geométrica logística $\pi(v)$ queda dado por la expresión (30)

$$\pi(V) = \mu V(1 - \gamma V) - (r - \alpha)V \quad (30)$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F''(V) + [\mu(1 - \gamma V) - \beta \sigma] V F'(V) - (r - \alpha) F(V) = 0 \quad (32)$$

$$V^0 f(V) [\frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) + (\mu - \beta \sigma) \theta - (r - \alpha)] + V^{\theta+1} [\frac{1}{2} \sigma^2 V f''(V) + (\sigma^2 \theta + \mu \{1 - \gamma V - \beta \sigma\}) f'(V) - \mu \gamma \theta f(V)] = 0 \quad (33)$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) + (\mu - \beta \sigma) \theta - (r - \alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \sigma^2 V f''(V) + (\sigma^2 \theta + \mu \{1 - \gamma V - \beta \sigma\}) f'(V) - \mu \gamma \theta f(V) = 0 \quad (39)$$

Tomando la raíz positiva de la primera ecuación

$$\theta_\sigma = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma}\right)^2 + \frac{2(r - \alpha)}{\sigma^2}} \quad (40)$$

la segunda ecuación diferencial corresponde a la ecuación de Kummer, la que admite como solución la serie hipergeométrica siguiente:

$$M(x; a; b) = 1 + \frac{a}{b} \frac{x}{1} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (41)$$

con los parámetros

Por lo tanto el óptimo estocástico queda dado al reemplazar los valores de los parámetros de deriva y volatilidad de la difusión geométrica logística en las inecuaciones diferenciales del HJB.

Reemplazando los parámetros logísticos

$$\mu(V) = \mu(1 - \gamma V) \quad \text{y} \quad \sigma_v = \sigma \quad (31)$$

en la ecuación de continuidad (10), se transforma en la ecuación (32).

Dixit & Pindyck [3] propusieron el siguiente tipo de solución para esta ecuación diferencial

$$\Psi(V) = V^\theta f(V)$$

Reemplazando $F = A\Psi(V) = AV^\theta f(V)$ y sus derivadas, en la ecuación diferencial ordinaria de la región de continuación, ésta toma la forma de la ecuación (33), la que será cierta para todo $V \geq 0$ si sólo si se cumple la ecuación (34)

$$x = \frac{2\mu\gamma V}{\sigma^2}$$

$$a = \theta$$

$$b = 2\theta + \frac{2(\mu - \beta\sigma)}{\sigma^2}$$

La solución de ψ para la región de continuación queda dada por

$$\Psi_\sigma = V^\theta M\left\{\frac{2\mu\gamma V}{\sigma^2}, \theta, 2\theta + \frac{2(\mu - \beta\sigma)}{\sigma^2}\right\} \quad (42)$$

La solución óptima V^* está dada por la solución de las condiciones de “smooth pasting” (13) que se programó en Maple. Los valores óptimos se muestran

en la tabla 5.1 de las series anuales seleccionadas para la variable de estado VOLT/HECT.

Las soluciones de corte óptimo estocástico para la serie anual de VOLT/HECT, para la series agregada, se adjuntan en la tabla 5.2

La tabla 5.2 compara los óptimos estocásticos V^{opt} en valor y porcentaje con los óptimos deterministas V^D y con la actual política de corte V^C , para la serie agregada 30/35.

Tabla 5.2 Corte óptimo estocástico en (m3/ha)

Parámetros	Corte actual	Determinístico V^D	Estocástico V^{opt}
α		0,029	0,029
β			0,159
γ		0,0016	0,0016
μ		0,163	0,163
σ			0,274
Optimo(m3/h)	392,9	339,2	655,76
Índice Actual	100	86,33	166,9
Índice Det.	115,83	100	193,8

Claramente se observa que en condiciones estocásticas hay un importante aumento del óptimo de corte, retrasando significativamente la edad de corte. Para la serie agregada (30/35) este aumento alcanza a 66,9% del corte promedio actual y un 93,8 % del corte óptimo determinista.

5.3 Análisis de sensibilidades de las volatilidades

A fin de evaluar el efecto las volatilidades de ambos procesos de difusión y poder sensibilizar sus resultados, se realizó además un análisis de sensibilidad del corte estocástico óptimo, de la volatilidad de la difusión del stock de madera σ , y de los precios β Tabla 5.1 para la serie agregada. Ambos proceso de difusión resultan importantes. Para volatilidades inferiores al 50% prima la de los precios y superiores a esa cifra lo hace la del inventario de rodales. El análisis de sensibilidad muestra que un incremento de un 10 puntos porcentuales de la actual volatilidad de los precios aumento el nivel de corta estocástico en un 11,1 %. El mismo incremento de la volatilidad del stock de madera produce un aumento de 26% del nivel de corta óptimo estocástico.

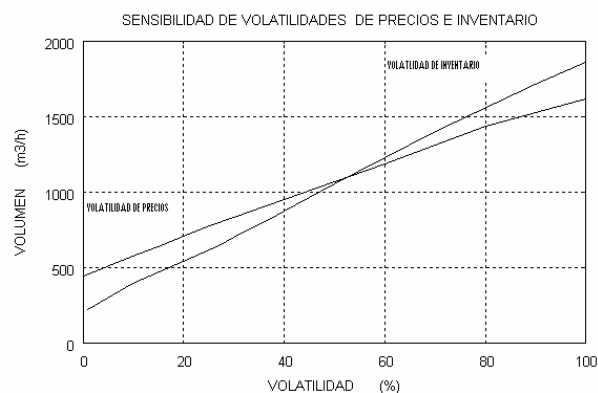


Figure 5.1. Análisis de sensibilidad de la volatilidad del stock de madera

6: CONCLUSIONES Y RESULTADOS

1. La política actual de corte que sigue la empresa es similar a la política óptima determinista de Vicksell, ya que es un 13,7% mayor que el óptimo determinístico, y un 86,9% inferior a su óptimo estocástico.
2. El efecto de la aleatoriedad de los precios y del stock de Madera son muy significativo, ya que prácticamente aumenta el corte óptimo actual en un 66,9 % y el optimo determinístico en un 93,3%, para la serie agregada
3. Ambos proceso de difusión resultan importantes. Para volatilidades inferiores al 50% prima la de los precios y superiores a esa cifra lo hace la del inventario de rodales. Un aumento del 10 puntos porcentuales de sus actuales volatilidades, en el caso de los precios incrementa el nivel de corta optimo estocástico en un 11,1% y en el caso de la del inventario de rodales en un 26%.
4. El efecto del índice de sitio para la serie desagregada no produce efectos significativos, Si bien la tasa de crecimiento y el volumen de saturación aumentan con el índice de sitio, la variabilidad no disminuye sino sube levemente.
5. El modelo está sujeto a la importante objeción económica hecha por Samuelson (1976) al no considerar el costo de la tierra usada en la plantación.
6. La otra limitación importante del modelo, que es el sesgo de los datos proveniente de la ventanilla de cosechas de la empresa, fuerza la necesidad de imponer una curva logística que

parta de cero. La presencia de heterocestadidad limita la aplicación de los modelos de regresión tradicionales y obliga a usar muestreo de Monte Carlo mediante el método de “bootstrap” para obtener rangos de confiabilidad de los parámetros.

- Finalmente se han desarrollado varias innovaciones teóricas en el artículo. Se desarrollaron dos nuevos modelos para cosechas forestales óptima, bajo difusión estocástica del precio y del stock de madera, frente al riesgo al reformular el modelo de una sola rotación como un problema de parada óptima con una sola difusión estocástica. Solucionable mediante las inecuaciones diferenciales de Hamilton-Jacobi-Bellman. Por último se desarrolló un método de estimación del parámetro de volatilidad de la difusión de inventario a partir de la estimación de los rangos de confiabilidad del 95% de los volúmenes de saturación de la curva logística.

REFERENCIAS

- Alvarez LH, Koskela E. 2006. Optimal Harvesting Under Resource Stock and Price Uncertainty. *Journal of Economics Dynamics & Control*, doi:10.1016.
- Clarke R, Reed W. 1989. The Tree Cutting Problem in a Stochastic Environment, *Journal of Economics Dynamics and Control* N° 13: 569-595.
- Copeland, Weston, Shastri; 2005, Financial Theory and Corporate Policy, Addison Wesley
- Dixit A, Pindyck R. 1994. Investment under uncertainty, Princeton, University Press.
- Ewald C.D., Yang Z.; (2007) Geometric Mean Reversion: Formulas for the equilibrium Density and analytic moment matching, preprint.
- Faustaman M, (1849 translation 1995), Calculation of the Value which Forest Land and Immature Stands possess for Forestry, Republished, *Journal of Forest Economics* 1: 7-44.
- Fisher F, 1907. The Rate of Interest, New York Macmillan.
- García O. 2005. Unifying Sigmoid Univariate Growth Equations, FBMS.
- Hull J. 2000. Options Futures & Others Derivatives, Prentice Hall
- Insley M, Rollins K. 2005. On solving the multi-rotational timber harvesting problem with stochastic prices: a linear complementarily formulation. *American Journal of Agriculture Economics* 87: 735-755.
- Johnson T.C., (2006) The Optimal timing of Investment decision, Doctoral Thesis, Department of Mathematics, London University.
- Kloeden P., Platen E., 1992, Numerical Solutions of Stochastic Differential equation, Springer-Verlag Berlin.
- Mascareñas J, Lamothe P, López F, Luna W. 2004. Opciones Reales y Valoraciones de Activos, Prentice Hall.
- Merton R., (1975), An asymptotic theory of growth under uncertainty, Review of Economic Studies.
- Meyer, Yung, Ausubel, 1999, A primer on Logistic Growth and substitutions. The Mathematic of the Logolet Lab Software
- Morck R, E. Schwartz, D. Stangeland. 1989. “The valuation of forestry resources under stochastic prices and inventories”, *Journal of Finance. Quant. Anal.* 24: 473-487.
- Oksendal, B. (2000), Stochastic Differential Equation (fifth edition), Springer Verlag
- Plantinga AJ. 1998, The optimal timber rotation: An option approach. *Forest Science*, 44: 202.
- Samuelson P. 1976. Economics of Forestry in an evolving society. *Economic Inquiry* 14: 466-491.
- Santibañez Patricio. 2006, Forestal Mininco, Los Angeles.
- Thompson TA. 1992. Optimal forest rotation when stumpage prices follow a diffusion processes. *Land Economics*, 68: 329.

APENDICE 1

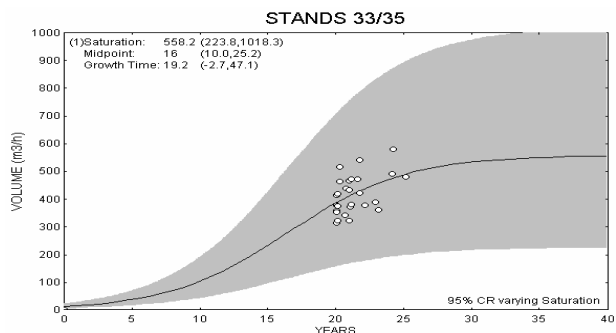


Figura 4.4 Ajuste Logolet de la serie 33/35

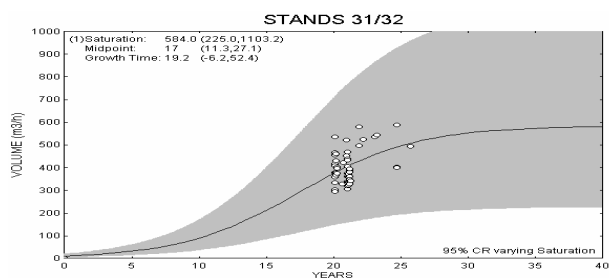


Figura 4.5 Ajuste Logolet de la serie 32

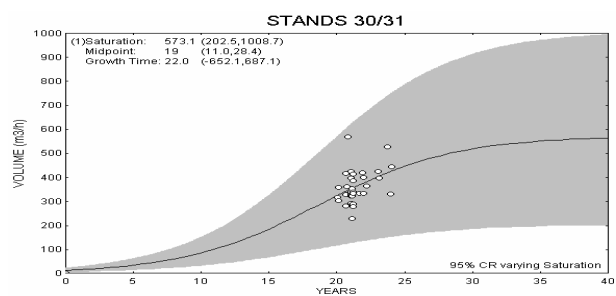


Figura 4.6 Ajuste Logolet de serie 30/31