NUMERISCHE LÖSUNG DES VORWÄRTSPROBLEMS IN DER MAGNETOENZEPHALOGRAPHIE (MEG)

J. v. Rango[1], H. A. Schlitt[1], H. Halling[2] und H.-W. Müller-Gärtner[1]

Institut für Medizin (IME)[1], Zentrallabor für Elektronik (ZEL)[2]
Forschungszentrum Jülich GmbH, 52425 Jülich
j.von.rango@kfa-juelich.de

Für Untersuchungen des Einflusses von Leitereigenschaften auf die rekonstruierten Quellen des magnetische Feldes, wie z. B. anisotrope Leitfähigkeiten oder Variationen der Leitergeometrie, ist das häufig benutzte Kugelmodell nicht ausreichend. Wir verwenden eine 3-dimensionale "Finite-Integrations-Technique" (FIT) [1] für die Lösung des Vorwärtsproblems mit der realistische Leitergeometrien und Leitfähigkeiten modelliert werden können. Zur Umgehung von numerischen Schwierigkeiten, die sich daraus ergeben, daß die elektrischen Felder in der Umgebung der Quellen singulär werden, wird das Problem aufgespalten in einen analytisch leicht berechenbaren Anteil, der alle Singularitäten enthält und einen numerisch zu berechnenden regulären Anteil. Wir stellen hier erste Rechnungen mit dieser Methode vor.

Keywords: FIT, Forward problem, realistisches Leitermodell

1 Einleitung

Messungen der Magnetfelder von Hirnaktivitäten bei der Magnetoenzephalographie (MEG), erfordern die Lösung eines inversen Problems: Aus dem gemessenen Magnetfeld sind die Quellen des Feldes zu bestimmen. Es handelt sich dabei um ein schlecht gestelltes Problem (ill posed), dessen Lösung nicht eindeutig ist. Zum einen hängt die räumliche Auflösung von dem Signal/Rausch Verhältnis ab und zum anderen gibt es Quellverteilungen die kein äußeres Magnetfeld erzeugen. So sind a priori Annahmen nötig, um sinnvolle Lösungen zu erhalten.

Für die Abschätzung von Effekten, die z. B. durch anisotrope Leitfähigkeiten im Gehirn oder durch individuelle Variationen der Leitergeometrie hervorgerufen werden, ist das häufig benutzte Kugelmodell [2] mit isotroper Leitfähigkeit für den Kopf nicht ausreichend. Realistische Leitermodelle, wie sie aus MRI-Bildern gewonnen werden können, sind notwendig, um solche Fragen zu beantworten. Für die Lösung des sogenannten Vorwärtsproblems, bei dem die Quellen der Hirnaktivität und eine realistische Leitergeometrie vorgegeben werden, sind im allgemeinen numerische 3–dimensionale Verfahren nötig. Für Leiter, die aus verbundenen Teilvolumina mit jeweils konstanter und isotroper Leitfähigkeit bestehen, wird häufig die "Boundary-Element-Method" (BEM) verwendet. Falls nicht stückweise homogene Leitfähigkeiten vorliegen, müssen 3-dimensionale Gitterverfahren wie "Finite-Elemente-Methoden" (FEM) oder "Finite-Differenzen-Methoden"

(FDM)verwendet werden. Wir verwenden im folgenden eine spezielle FDM, eine "Finite-Integration-Technique" (FIT), bei der die Maxwell Gleichungen in integraler Form auf einem Gitter diskretisiert werden.

Analytische Lösungen gibt es nur für ausgeprägt symmetrische Leitergeometrien wie eine Kugel oder einen Halbraum mit konstanter Leitfähigkeit. Deswegen vergleichen wir zur Bestimmung der Güte der verwendeten Methode die numerisch berechneten Felder für Quellen in einer Kugel mit der analytischen Lösung.

2 Methoden

Zur Lösung des Vorwärtsproblems läßt sich das äußere gemessene Magnetfeld $\mathbf{B}$ mit dem Gesetz von Biot-Savart bestimmen,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}'. \tag{1}$$

Hier ist die Kenntnis der gesamten inneren Stromdichteverteilung $\mathbf{j}$ notwendig, die sich bei vorgegebener Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{r})$ in zwei Anteile aufspalten läßt,

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^P + \mathbf{j}^V = \mathbf{j}^P - \sigma \boldsymbol{\nabla} V. \tag{2}$$

Der erste Anteil $\mathbf{j}^P$ (primary currents) steht für die Quellen des elektrischen Feldes. Er ist leicht analytisch zugänglich und unabhängig von dem verwendeten Leitermodell. Häufig wird er durch einen sogenannten Stromdipol $\mathbf{Q}$ modelliert, der aus einer elektrischen Quelle und Senke besteht, die infinitesimal benachbart sind ("Minibatterie"). Durch Superpositionierung von Stromdipolen sind dadurch prinzipiell alle Quellen modellierbar. Der zweite Anteil $\mathbf{j}^V$ wird durch ohmsche Volumenströme im Leiter hervorgerufen, die einen Ladungsausgleich im Volumen gewährleisten. Dieser Anteil beinhaltet die gesamte Abhängigkeit von den Leitereigenschaften. Die Bestimmung des durch ihn verursachten Magnetfeldes stellt das eigentliche Vorwärtsproblem dar. Zur Berechnung von $\mathbf{j}^V$ wird wie in Gl. (2) angegeben, die Potentialverteilung V im Inneren des Leiters benötigt.

Die numerische Berechnung von V auf einem Gitter beinhaltet das Problem, auch in der Nachbarschaft der Quellen eine brauchbare Beschreibung des Feldes liefern zu müssen. An punktförmigen Quellen und Senken wie z. B. dem Stromdipol divergiert jedoch das Potential. Um diese Schwierigkeit eines singulären Punktes im Lösungsraum der numerischen Rechnung zu umgehen, wird das Potential in zwei Anteile aufgespalten:

$$V = V^{\infty} + V^{cor}. \tag{3}$$

V^{∞} beschreibt das Potential eine Stromquelle in einem *unendlich ausgedehnten* Leiter, der eine konstante Leitfähigkeit besitzt, die der des *vorgegebenen* Leiters am Ort der Quelle entspricht. V^{cor} beschreibt eine Korrektur und entspricht einer Änderung des *unendlich* ausgedehnten Volumenleiters auf den vorgegebenen *begrenzten* Leiter mit ortsabhängiger Leitfähigkeit. V^{cor} ist dann durch die Randbedingungen des Leiters und die Verteilung der Quellen bestimmt. Der Vorteil dieser Aufspaltung besteht darin, daß V^{∞} leicht analytisch bestimmt werden kann und alle Singularitäten enthält. Deswegen beinhaltet V^{cor} keine Singularitäten mehr und kann so numerisch leichter bestimmt werden.

2.1 Bestimmung von V^{∞} und V^{cor}

Für den gesamten Strom gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \mathbf{j} + \dot{\rho} = 0, \tag{4}$$

wobei $\dot{\rho}$ die zeitliche Änderung der Ladungsdichte beschreibt. Da es sich um das Problem einer stationären Stromverteilung handelt, ist jedoch $\dot{\rho} = 0$, so daß sich Gl. (4) reduziert auf

$$\nabla \mathbf{j} = 0. \tag{5}$$

Daraus erhält man mit Gl. (2) eine Bestimmungsgleichung für das Potential,

$$\Delta V \;\; = \;\; \frac{1}{\sigma} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{j}^P - \left(\frac{\boldsymbol{\nabla} \sigma}{\sigma} \right) \boldsymbol{\nabla} V. \tag{6}$$

Für einen unbegrenzten Leiter mit homogener Leitfähigkeit σ_0 verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (6) und man erhält für das zugehörige Potential V^{∞},

$$\Delta V^{\infty} = \frac{1}{\sigma_0} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{j}^P. \tag{7}$$

Gl. (7) hat die allgemeine Lösung,

$$V^{\infty}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \; \frac{1}{\sigma_0} \boldsymbol{\nabla}' \mathbf{j}^P(\mathbf{r}') \;\; d^3\mathbf{r}'. \tag{8}$$

Setzt man z. B. für $\mathbf{j}^P$ einen Stromdipol mit Dipolmoment $\mathbf{Q}$ am Ort $\mathbf{r}_Q$ ein,

$$\mathbf{j}^P(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \; \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q), \tag{9}$$

so erhält man für V^{∞} in Gl. (8) eine spezielle 1–Dipol Lösung,

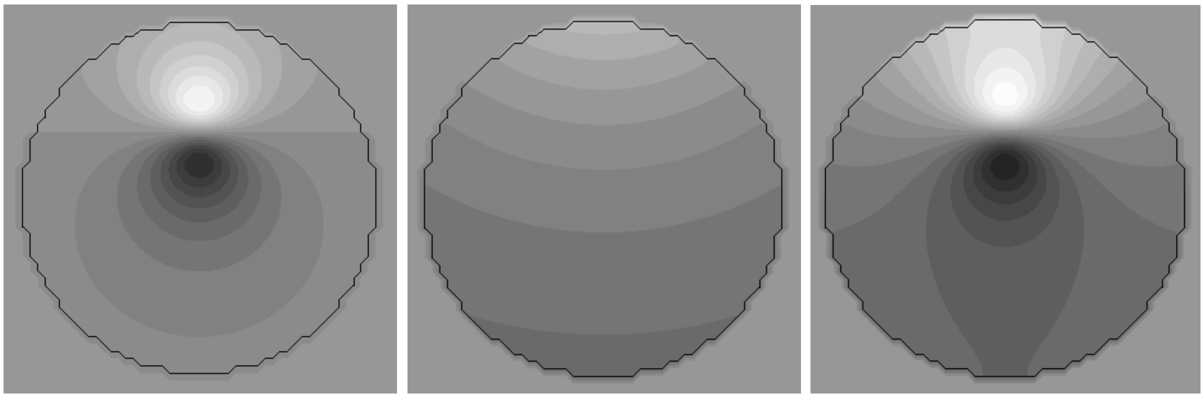
$$V^{\infty}_{\mathrm{Dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \frac{\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q\|^3}. \tag{10}$$

Um nun das Potential für einen begrenzten Leiter mit stückweise konstanter, aber nicht auch notwendig homogener Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{r})$ richtig zu beschreiben, muß zu V^{∞} aus Gl. (8) eine Korrektur addiert werden, denn der Ansatz von V^{∞} alleine würde zu fiktiven, unphysikalischen Ladungsanhäufungen $\dot{\rho}^{\infty}$ an den Grenzen ∂G von zwei Gebieten verschiedener Leitfähigkeit führen [Dabei kann es sich sowohl um den Übergang Volumenleiter/Isolator (Luft), als auch um zwei benachbarte Gebiete mit jeweils von null verschiedenen Leitfähigkeiten (z. B. Cortex/Liquor) handeln],

$$\mathbf{r} \in \partial G \quad \dot{\rho}^{\infty} = \boldsymbol{\nabla}(\sigma(\mathbf{r}) \boldsymbol{\nabla} V^{\infty}). \tag{11}$$

[Man beachte, daß V^{∞} unter Benutzung eines *unbegrenzten* Leiters mit *konstanter* Leitfähigkeit σ_0 am Ort der Quelle berechnet wurde, aber für $\dot{\rho}^{\infty}$ des *begrenzten* Leiters in Gl. (11) das *ortsabhängige* $\sigma(\mathbf{r})$ benutzt wurde!] Um die unphysikalische Ladungsanhäufung $\dot{\rho}^{\infty}$ an den Grenzen verschiedener Leitfähigkeit auszugleichen, müssen wir zur Korrektur zusätzliche elektrische Quellen $\dot{\rho}^{cor}$ einführen, so daß die Kontinuitätsgleichung für die divergenzfreien Ströme $\mathbf{j}$ auch an den Rändern erfüllt ist,

$$\mathbf{r} \in \partial G \quad \boldsymbol{\nabla} \mathbf{j} = -(\dot{\rho}^{\infty} + \dot{\rho}^{cor}) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}^{cor} = -\dot{\rho}^{\infty}. \tag{12}$$



V^{∞} $\qquad$ V^{cor} $\qquad$ V

Abbildung 1: V^{∞}, V^{cor} und V=$V^{\infty} + V^{cor}$ in einer Kugel mit isotroper Leitfähigkeit. Parallel zum dargestellten Schnitt durch den Kugelmittelpunkt befindet sich ein Stromdipol. Die numerischen Berechnungen von V^{cor} wurden mit der FIT Methode durchgeführt.

$\dot{\rho}^{cor}$ stellt dann die Quelle eines unbekannten Korrekturpotentials V^{cor} dar,

$$\mathbf{r} \in \partial G \quad \dot{\rho}^{cor} = \boldsymbol{\nabla}(\sigma \boldsymbol{\nabla} V^{cor}). \tag{13}$$

Aus Gl. (11), (12) und (13), erhält man schließlich eine Differentialgleichung für V^{cor},

$$\mathbf{r} \in \partial G \quad \boldsymbol{\nabla}(\sigma \boldsymbol{\nabla} V^{cor}) = -\boldsymbol{\nabla}(\sigma \boldsymbol{\nabla} V^{\infty}). \tag{14}$$

In die rechte Seite von (14) kann nun die analytische Form von $V^{\infty}_{\mathrm{Dip}}$ aus Gl. (10) eingesetzt werden. Es kann aber auch ein anderes analytisches Potential benutzt werden, das in einem unbegrenzten Leiter zu der vorgegebenen Quellanordnung gehört. Ein Beispiel für berechnete Potentiale ist in Abb. 1 gezeigt. Gl. (14) ist ähnlich zu der BEM–Formulierung des Vorwärtsproblems, mit dem Unterschied, daß hier eine differentielle Darstellung gewählt wurde. Das hat den Vorteil, daß auch anisotrope Leitfähigkeiten behandelt werden können.

2.2 FIT Methode

Gl. (14) kann mit einer 3-dimensionalen Gitter–Methode gelöst werden. Wir benutzen hier einen FIT-Algorithmus, der in dem Programmpacket MAFIA [1] implementiert ist. Die Maxwell-Gleichungen werden auf einem rechtwinkligen Gitter diskretisiert. Ladungen und Potentiale werden in den Zentren der kubischen Gitterzellen und die zugehörigen Ströme auf den Verbindungslinien benachbarter Zellzentren definiert. Durch eine lokale Volumenintegration der Feldgleichungen innerhalb jeder der n Gitterzellen (finite Integration) wird ein Gleichungssystem mit n (3n) Gleichungen für ein skalares (vektorielles) Feld definiert.

Der hier vorliegende Fall wird als elektrostatisches Problem einer stationären Stromverteilung für das unbekanntes Potential V^{cor} aufgefaßt. Die rechte Seite von Gl. (14) stellt hier den vorgegebenen Quellterm dar. Das resultierende $n \times n$ Gleichungssystem kann anschließend durch gängige Projektions- oder Iterationverfahren gelöst werden.

Die Abstände zwischen den Gitterlinien können variiert werden, um eine höhere räumliche Auflösung der Felder in Bereichen maximaler Feldänderungen zu unterstützen. Realistische Volumenleitermodelle können in Form von triangulisierten Oberflächendaten, wie sie sich aus MRI-Bildern berechnen lassen, zur Modellierung der Leitergeometrie benutzt werden.

2.3 Berechnung des Magnetfeldes

Nachdem die Stromverteilung aus dem Potential unter Verwendung von Gl. (2) berechnet wurde, kann mit Hilfe einer diskreten Formulierung von Gl. (1) durch Summation über sämtliche Stromelemente auf dem Gitter das äußere Magnetfeld berechnet werden. Dabei tritt hier das Problem von singulären Beiträgen in der Nähe der Quellen ebenso auf, wie bei der Berechnung des Potentials im Volumen. Allerdings kann z. B. durch die Wahl des Gitters symmetrisch zu dem Ort einer Dipolquelle dafür gesorgt werden, daß Diskretisierungsfehler stark unterdrückt werden können, da diese Fehler dann symmetrisch zu den Quellen auftreten und sich bei der anschließenden Magnetfeldberechnung in 1. Näherung aufheben.

Zusätzlich bietet sich die Möglichkeit, bei stückweise homogenen Volumenleitern Gl. (1) partiell zu integrieren. Man erhält dann folgenden Ausdruck,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{j}^V \right) \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}', \tag{15}$$

wobei $\mathbf{B}_0$ das durch die Quellen alleine hervorgerufene Magnetfeld darstellt. Nun gilt für den Volumenstrom $\mathbf{j}^V = -\sigma_0 \boldsymbol{\nabla} V$ stets,

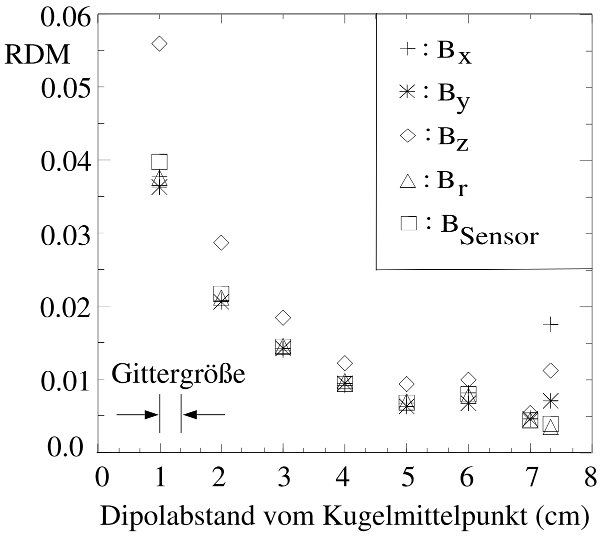
$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{j}^V \begin{cases} = 0 & \text{für} \quad \mathbf{r} \in G \\ \neq 0 & \text{für} \quad \mathbf{r} \in \partial G. \end{cases} \tag{16}$$

Deswegen tragen bei dieser Formulierung des Magnetfeldes nur Ströme bei, die auf den Grenzen ∂G der verbundenen und stückweise homogenen Leiterelemente liegen. Damit kann vermieden werden, daß Strombeiträge aus der unmittelbaren Umgebung der Quellen in die Stromsummation eingehen, da deren Diskretisierungsfehler aufgrund ihrer hohen Werte, im Vergleich zu den Strömen im übrigen Volumen, die Genauigkeit der Rechnung herabsetzen können. Dieses Verfahren bietet sich insbesondere bei der Verwendung von ungleichen Gitterabständen in der Nähe der Quellen an. Außerdem wird dadurch deutlich die benötigte Rechenzeit reduziert, da statt aller Gitterpunkte im Leiter nur Randpunkte beitragen.

3 Ergebnisse und Diskussion

Für ein Abschätzung der Güte der verwendeten Methode vergleichen wir die numerisch berechneten Felder für einen Kugelleiter mit der analytischen Lösung. Die verwendete Kugel hat einen Radius von 8 cm und liegt zentral innerhalb eines gleichseitigen Kubus mit der Kantenlänge 19 cm. Der gesamte Kubus wird durch ein äquidistantes Gitter mit 0,33 cm Abstand diskretisiert. Nach Abschluß der Gitterrechnung wird um die Kugel das 148-Kanal Magnetometer Ganzkopf-System von BTI simuliert. Zum Vergleich mit der analytischen Lösung wird das Magnetfeld sowohl in x, y und z, als auch in radiale und die

Abbildung 2: RDM Werte für tangentiale Dipole in einer Kugel mit variierendem Abstand zum Kugelmittelpunkt. (Kugelradius 8cm, Gitterabstand 1/3 cm) Die RDM-Werte wurden für die Sensorpositionen des 148-Kanal Magnetometer-System der Fa. BTI berechnet. (**B**-Feld in *x, y, z, radialer* und die durch die *Sensoren* vorgegebene Richtung)



durch die Magnetometer vorgegebene Richtung berechnet. Zum Vergleich benutzen wir die gewichtetete Fehlerabschätzung RDM (relative difference measure) [3],

$$\mathrm{RDM} = \sqrt{\frac{\sum_i^{148} (\mathbf{B}_i^{num} - \mathbf{B}_i^{ana})^2}{\sum_i^{148} (\mathbf{B}_i^{ana})^2}}. \tag{17}$$

Die Ergebnisse sind in Abb. 2 dargestellt. Die numerischen Felder weichen für tiefe und oberflächennahe Dipole am stärksten von den analytischen Werten ab. Allerdings verschwindet auch das gesamte äussere Magnetfeld, falls die Quelle im Zentrum der Kugel liegt. Rechnungen mit oberflächennahen Dipolen beinhalten das Problem, daß die Quellen des Korrekturfeldes V^{cor} räumlich scharf begrenzt werden und folglich numerische Fehler auftreten. Durch eine Verfeinerung des Gitters auf ca. 10^6 Gitterpunkte werden wir die Genauigkeit der Rechnungen noch weiter verbessern. Eine lokale Verfeinerung des Gitters an Grenzenschichten führt ebenfalls zu einer Verbesserung, da die Abweichungen erst signifikant ansteigen, wenn der Abstand zwischen Dipol und Oberfläche kleiner als 3 Gitterabstände wird.

Diese Methode wird uns in Zukunft ermöglichen, realistische Vorwärtsrechnungen und Untersuchungen zu anisotropen Leitfähigkeiten durchzuführen.

Danksagung

Wir danken B. Steffen für seine Unterstützung bei der Implementierung dieser Methode.

Literatur

[1] Weiland, T. Proc. of URSI International Symposium on Electromagnetic Theory, 1986, Part B:537-542

[2] Sarvas, J. Phys. Med. Biol., 1987, 32:11-22

[3] Meijs, J. W. H. et al., Med. & Biol. Eng. & Comput., 1988, 26:136-142